2.1 Stopa Inflacji

Stopa inflacji, i, mierzy jak szybko ceny się zmieniają jako zmiana procentowa w skali rocznej.

Oblicza się ją za pomocą średniej ważonej cząstkowych stóp inflacji, gdzie cząstkowa stopa inflacji odpowiada danemu towarowi.

Wagi odpowiadają proporcji budżetów domowych wydanej na dany towar.

Stopa Inflacji

W oparciu o zbiór składający się z n towarów, stopa inflacji wyraża się wzorem

$$i = \sum_{k=1}^{n} w_k i_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{100 w_k \Delta p_k}{p_k},$$

gdzie w_k jest wagą k-tego towaru (proporcją budżetów domowych wydaną na towar k), i_k jest cząstkową stopą inflacji odpowiadającej towarowi k, p_k jest ceną towaru k z poprzedniego roku, Δp_k jest zmianą ceny towaru k w ciągu ostatniego roku ($\Delta p_k > 0$ gdy cena rośnie, $\Delta p_k < 0$ gdy cena maleje).

Stopa Inflacji

Należy zauważyć że wagi te są odpowiednio zmieniane z roku na rok.

W dodatku, gdy towary zostaną przestarzałe, zostaną usunięte lub zamienione innymi towarami przy obliczeniu stopy inflacji.

np. Maszyny do pisania zostały zamienione komputerami, a płyty winylowe płytami kompaktowymi oraz plikami MP3.

Przykład 2.1

Zakładamy że stopa inflacji jest oparta na czterech rodzajach towarów: jedzenie, mieszkanie, transport oraz rozrywka.

Udział tych 4 sektorów w budżetach domowych oraz poziom cen w latach 2019 i 2020 podano w następującej tabelce. Wyznaczyć stopę inflacji.

Sektor	Udział (%)	Cena 2019	Cena 2020
Jedzenie	20	10	10,1
Mieszkanie	50	20	20,3
Transport	20	30	29,7
Rozrywka	10	40	42

Przykład 2.1

Inflacja na jedzenie

$$i_1 = \frac{100(10.1 - 10)}{10} = 1(\%)$$

Inflacja na mieszkanie

$$i_2 = \frac{100(20.3 - 20)}{20} = 1.5(\%)$$

Przykład 2.1

Inflacja na transport

$$i_3 = \frac{100(29.7 - 30)}{30} = -1(\%)$$

Inflacja na rozrywkę

$$i_4 = \frac{100(42 - 40)}{40} = 5(\%)$$

Przykład 2.1

Ogólny poziom inflacji.

$$i = \sum_{k=1}^{4} w_k i_k = 0.2 \times 1 + 0.5 \times 1.5 + 0.2 \times (-1) + 0.1 \times 5 = 1.25\%$$

2.1 Wartość Aktualna Renty Stałej

Zakładamy że dana osoba ma dostać kwotę o stałej wartości nominalnej x przez N okresów (zwykle miesięcznie lub rocznie), np. stała renta/emerytura.

Zakładamy że pierwsza wypłata zajdzie w czasie t_0, potem wypłaty zajdą co jednostkę czasu, czyli ostatnia wypłata zajdzie w czasie $t_0 + N - 1$.

Uwaga: Jednostką czasu jest czas między wypłatami.

Wartość Aktualna Renty Stałej

Osoba wolałaby dostać kwotę Nx teraz niż taką rentę, np. ona mogłaby zainwestować tę kwotę, brać x w każdym okresie czasu. Wtedy stan konta po N jednostkach czasu jeszcze będzie dodatni.

Więc Nx jest ograniczeniem z góry na aktualną wartość stałej renty o nomalnej wartości takiej renty.

Tak jak w Rozdziale 1, zakładamy że wartość aktualna przychodu x, który ma zajść za t jednostek czasu, wynosi $V(x;t) = x\alpha^t$, gdzie α jest dyskontem na jednostkę czasu.

Wartość Aktualna Renty Stałej

Często dyskonto zależy od (oczekiwanej) inflacji. Daje to miarę siły nabywczej tej renty.

Gdy oczekiwana inflacja jest $100i\%$ w skali rocznej, opdowiednie dyskonto roczne wynosi

$$\alpha = \frac{1}{1+i}.$$

Gdy inflacja jest dosyć niska ($\leqslant 5\%$ rocznie), możemy korzystać z przybliżenia.

$$\alpha \approx 1 - i.$$

Czasami dyskonto zależy od rocznej stopy procentowej (w równaniach powyżej i jest zastąpione przez R). Daje to miarę "siły inwestycyjnej" tej renty.

Wzór na sumę szeregu geometrycznego

Niech $a_i = cr^i$. Wtedy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest ciągiem geometrycznym $c, cr, cr^2, \ldots$. Niech S_k będzie sumą pierwszych k elementów tego ciągu, $a_0, a_1, \ldots a_{k-1}$. Mamy

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} cr^i = c(1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1})$$

Należy zanotować że

$$rS_k = c(r + r^2 + r^3 + \ldots + r^k).$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymujemy

$$S_k - rS_k = c(1 - r^k) \Rightarrow (1 - r)S_k = c(1 - r^k)$$

Wzór na sumę szeregu geometrycznego

Wynika z tego że

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} cr^i = \frac{c(1-r^k)}{1-r}.$$

W szczególności, gdy $|r| < 1$

$$S_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} cr^i = \frac{c}{1-r}$$

Uwaga: c jest pierwszym elementem ciągu a r jest stosunkiem $r = \frac{a_{i+1}}{a_i}$.

Wzór na sumę szeregu geometrycznego

Wynika z tego że wartość aktualna renty otrzymywanej co jednostkę czasu, zaczynając w momencie t_0, wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} V_A = \sum_{t=t_0}^{t_0+N-1} V(x;t) &= x\alpha^{t_0} + x\alpha^{t_0+1} + \ldots + x\alpha^{t_0+N-1} \\ &= x\alpha^{t_0}[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{N-1}] \\ &= x\alpha^{t_0} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha^i \\ &= \frac{x\alpha^{t_0}(1-\alpha^N)}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Wynik: Wzór na sumę szeregu geometrycznego

Wartość aktualna renty stałej, otrzymywanej co jednostkę czasu zaczynając w momencie t_0, wyraża się wzrorem

$$V_A = \frac{x\alpha^{t_0}(1-\alpha^N)}{1-\alpha},$$

gdzie x jest wypłatą stałą, α jest **dyskontem na jednostkę czasu**, pierwsza wypłata zachodzi w czasie t_0 oraz N jest liczbą wypłat.

Uwaga 1: Skoro jednostką czasu jest okresem między wypłatami, należy określić odpowiednie dyskonto (np. miesięczne, zob. wykład 1 oraz następujący przykład).

Uwaga 2: $x\alpha^{t_0}$ jest wartością aktualną pierwszej wypłaty.

Przykład 2.2

Stała renta o kwocie 2000zł ma zostać wypłacona co miesiąc przez 10 lat. Zakładać że oczekiwana inflacja wynosi 5% rocznie. Korzystając z odpowiedniego przybliżenia dla dyskonta rocznego, wyznaczyć

i) Dyskonto miesięczne

ii) Wartość aktualna takiej renty (według siły nabywczej), gdy pierwsza wypłata ma zajść teraz.

iii) Wartość aktualna takiej renty (według siły nabywczej), gdy pierwsza wypłata ma zajść za dwa lata.

Przykład 2.2

i) Dyskonto roczne, $\alpha \approx 1 - i = 0.95$.

Dyskonto miesięczne

$$\alpha_P = 0.95^{1/12} \approx 0.9957.$$

Przykład 2.2

ii) W sumie jest $10 \times 12 = 120$ wypłat.

$$V = \frac{2000(1 - 0.9957^{120})}{1 - 0.9957} = 188151.50$$

Przykład 2.2

Pierwsza wypłata (po 2 latach) jest dyskontowane przez $\alpha^2 = 0.95^2$ (według dyskonta rocznego) [lub, równoważnie przez α_P^{24} według dyskonta miesięcznego].

Mamy

$$V = \frac{2000 \times 0.95^2(1 - 0.9957^{120})}{1 - 0.9957} = 169806.73$$

Wartość aktualna ogólnego ciągu przyszłych wypłat

Gdy wartość wypłat jest zmienna, aby wyznaczyć wartość aktualną, najłatwiej zsumować wypłaty dyskontowane krok po kroku.

Takie ciągi przychodów są często spotykane w analizie kosztów i korzyści (zob. Rozdział 3).

2.3 Spłacenie pożyczek

Zakładamy że dług o kwocie X ma zostać spłacony przy nominalnej stopie rocznej $100R\%$ w ciągu T lat (zakładamy że okresem kapitalizacji jest rok).

Nie bierzemy pod uwagę "opłat organizacyjnych" (można założyć że są doliczone do wartości długu).

Zakładamy że dług jest kapitalizowany na początku roku w oparciu o obecną nominalną wartość długu.

Zakładamy że zastosowano stałe, miesięczne raty.

Spłacenie pożyczek

Na przykład, zakładamy że dłużnik ma spłacić pożyczkę o wartości nominalnej 100 000zł przy stopie rocznej 5% i ratach miesięcznych $600.

W pierwszym roku, oprocentowanie wynosi 5 000zł (5% z 100 000zł).

Dłużnik spłaca 7 200zł (12 rat o kwocie 600zł).

Wynika z tego że w pierwszym roku nominalna wartość długu maleje o 2 200zł (=7 200 - 5 000).

Więc, nominalna wartość długu po roku wynosi 97 800zł (=100 000-2 200).

Spłacenie pożyczek

W drugim roku, oprocentowanie wynosi 4 890 (5% wartości długu nominalnego po pierwszym roku, czyli $0{,}05 \times 97\ 800$).

Dłużnik spłaca 7 200zł (12 rat o kwocie 600zł).

Wynika z tego że w drugim roku nominalna wartość długu maleje o 2 310zł (=7 200 - 4 890).

Więc, nominalna wartość długu po dwóch latach wynosi 95 490zł (=97 800-2 310).

Uwaga: Z czasem nominalna wartość maleje coraz szybciej.

Ograniczenia na wartość raty

Dosyć łatwo możemy wyznaczyć dolne i górne ograniczenia na odpowiednią ratę za pomocą następujących faktów:

1. **Dolne ograniczenie** - W pierwszym okresie suma rat miesięcznych musi być większa niż odsetki.
2. **Górne ogranicznenie** - Rata miesięczna musi być mniejsza od tej, która zapewnia że nominalna wartość długu po jednym okresie wynosi $\frac{X(T-1)}{T}$.

Górne ograniczenie wynika z faktu że nominalna wartość długu spada coraz szybciej, czyli gdy proporcja $1/T$ długu jest spłacona w pierwszym okresie, wartość spłacona w ciągu T okresów będzie większa niż nominalna wartość długu.

Ograniczenia na wartość raty

Zakładamy że się płaci F rat rocznie (czyli przy ratach miesięcznych $F = 12$):

$\frac{XR}{F}$ **jest ograniczeniem na wartość raty z dołu**.

$\frac{X(R+1/T)}{F}$ **jest ograniczeniem na wartość raty z góry**.

Ograniczenia na wartość raty

Na przykład, gdy pożyczono 100 000zł na 20 lat przy nominalnej stopie rocznej 10% i kapitalizacji rocznej.

Aby spłacić oprocentowanie w pierwszym roku ($XR =$10 000zł), rata miesięczna wynosi $\frac{10000}{12} = 833,33$ (jest to ograniczenie z dołu).

Teraz obliczamy ograniczenie na wartość raty z góry

$$\frac{X(R + 1/T)}{F} = \frac{100000(0,1 + 0,05)}{12} = 1250.$$

Ograniczenia na wartość raty

Wynika z tego że rata miesięczna musi być między 833,33zł a 1250zł.

Jest to dosyć szeroki przedział, ale przynajmniej ilustruje jakiego rzędu ma być rata.

Równanie różnicowe dla nominalnej wartości długu

Niech nominalna wartość długu po t okresach będzie x_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, gdzie T jest termin spłacenia, p jest rata miesięczna, $x_0 = X$ jest nominalna wartość pożyczki.

Wynika z tego że po $t + 1$ okresach nominalna wartość długu wynosi

$$x_{t+1} = (1 + R)x_t - Fp, \qquad x_0 = X,$$

gdzie R jest roczną stopą procentową. Pierwsza składowa, $(1 + R)x_t$, jest nominalną wartością długu po nałożeniu oprocentowania, F jest liczbą rat w okresie między kapitalizacjami długu, (tutaj $F = 12$), czyli druga składowa jest sumą rat płaconych w ciągu roku.

Korzystając z tego wzoru, możemy łatwo wyznaczyć nominalną wartość długu po t lat za pomocą np. Excela.

Wyznaczenie odpowiedniej raty miesięcznej

Korzystając z równania różnicowego z ostatniego slajdu, można wyznaczyć wzór na nominalną wartość długu po t latach (w tym kursie nie obowiązuje).

Skoro z definicji $x_T = 0$ (dług zostanie spłacony po T latach), otrzymujemy następujący wzór na odpowiednią ratę miesięczną:

$$p = \frac{RX(1+R)^T}{F[(1+R)^T - 1]},$$

gdzie F jest liczbą rat płaconych w każdym roku (między kapitalizacjami), tutaj 12.

Przykład 2.3

Zakładamy że pożyczono 100 000zł na 20 lat przy stopie rocznej 10% nałożonej co roku.

i) Wyznaczyć odpowiednią ratę miesięczną.

ii) W oparciu o taką wypłatę, wyznaczyć nominalną wartość tego długu po t latach, gdzie $t = 1, 2, 3$.

Przykład 2.3

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{RX(1+R)^T}{F[(1+R)^T - 1]} \\
&= \frac{0.1 \times 100000 \times 1.1^{20}}{12(1.1^{20} - 1)} = 978.83.
\end{aligned}
$$

Przykład 2.3

x_t - dług po t latach

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= (1+R)x_t - Fp \\
x_1 &= 1.1 \times 100000 - 12 \times 978.83 = 98254.04 \\
x_2 &= 1.1 \times 98254.04 - 12 \times 978.83 = 96333.48 \\
x_3 &= 1.1 \times 96333.48 - 12 \times 978.83 = 94220.87
\end{aligned}
$$

Efektywna stopa procentowa

Należy zanotować że kapitalizacja zachodzi na początku każdego okresu.

Czyli nominalna stopa procentowa nie uwzględnia faktu że część długu jest spłacona podczas każdego okresu.

Wynika z tego że efektywna stopa procentowa jest większa niż nominalna stopa procentowa.

Efektywna stopa procentowa

Efektywny koszt pożyczenia można wyrazić za pomocą efektywnej rocznej stopy procentowej APR (z angielskiego, annual percentage rate).

Przy stałych ratach można oszacować APR, R_E, za pomocą wzoru

$$R_E \approx \frac{2AF}{X(N+1)},$$

gdzie F jest liczbą rat w ciągu roku (tutaj 12), N jest liczbą wszystkich rat oraz A jest różnicą między sumą rat a nominalną wartością pożyczki, czyli $A = Np - X$.

Oszacowanie APR

W tym wypadku, $N = 12T$ (12 rat co roku przez T lat).

Różnica między sumą rat a nominalną wartością pożyczki wynosi $A = 12Tp - X$ (suma rat minus nominalna wartość pożyczki).

Więc,

$$R_E \approx \frac{24(12Tp - X)}{X(12T + 1)}.$$

Realna stopa procentowa

Realna stopa procentowa uwzględnia fakt że rzeczywista wartość pieniędzy maleje względem czasu z powodu inflacji.

Zakładamy że effektywna stopa procentowa wynosi $100R\%$ rocznie oraz inflacja wynosi $100i\%$ rocznie.

Realna stopa procentowa, $100r\%$, spełnia równanie

$$1 + r = \frac{1+R}{1+i}.$$

Gdy inflacja jest niska, możemy korzystać z przybliżenia

$$r \approx R - i.$$

Przykład 2.4

i) Oszacować APR dla pożyczki z przykładu 2.3.

ii) Zakładamy że inflacja roczna wynosi 3%. W oparciu o APR, oszacować realną stopę procentową za pomocą

a) wzoru na realną stopę procentową

b) aproksymacji.

Przykład 2.4

i) Nadwyżka:

$$A = 12 \times 20 \times 978.83 - 100000 = 134919.20$$

Liczba rat $N = 12 \times 20 = 240$.

$$\begin{aligned} R_E &= \frac{2AF}{X(N+1)} \\ &= \frac{24 \times 134919.20}{100000 \times 241} = 0.134359 \end{aligned}$$

Efektywna stopa (APR): 13.4359%.

Przykład 2.4

ii) a)

$$1 + r = \frac{1 + R_E}{1 + i} = \frac{1.134359}{1.03}$$
$$1 + r \approx 1.10132 \Rightarrow r \approx 0.10132$$

Stopa realna: 10.132%.

b)

$$r \approx R_E - i = 10.4359\%.$$