4. Ubezpieczenie Życiowe

Składka ubezpieczeniowa musi brać pod uwagę następujące czynniki:

1. Kwotę wypłaconą przy śmierci ubezpieczonego oraz jej wartość aktualną.
2. Rozkład czasu do śmierci ubezpieczonego w zależności od aktualnego wieku (oraz innych czynników).
3. Pozostałe koszty (administracja, podatki itp.)

Rozważamy tylko pierwsze dwa rodzaje czynników i określamy tak zwaną składkę netto.

Tabelka Umieralności

Rozkład czasu do śmierci jest oszacowany za pomocą tabelek umerialności.

Tabelki te są oparte na próbie jednostek urodzonych w danym okresie czasu, czyli na tak zwanej kohorcie.

Najbardziej przydatna informacja w tych tabelkach jest intensywność zgonów w wieku t (jednostką czasu jest zwykle rok).

Intensywność zgonów w wieku t równa się prawdopodobieństwu tego że osoba umiera przed wiekiem $t + 1$ przy warunku że jeszcze żyje w wieku t.

Tabelka Umieralności

Niech N_t będzie liczbą osób w kohorcie, które jeszcze żyją w wieku t.

Wtedy liczba osób, które umierają przed wiekiem $t+1$ przy warunku że jeszcze żyją w wieku t wynosi M_t, gdzie

$$M_t = N_t - N_{t+1}$$

Dzieląc przez liczbę osób jeszcze żyjących w wieku t, otrzymujemy estymator intensywności zgonów w wieku t.

$$m_t = \frac{N_t - N_{t+1}}{N_t}.$$

Przeżywalność w wieku t, s_t, wyraża się wzorem $s_t = 1 - m_t$.

Tabelka Umieralności

Wiek	Rozmiar kohorty	Liczba zgonów	Intensywność zgonów
40	9 377 225	28 319	$\frac{28319}{9377225} = 0,003020$
41	9 348 906	30 758	$\frac{30758}{9348906} = 0,003290$
42	9 318 148	33 173	$\frac{33173}{9318148} = 0,003560$
43	9 284 975	35 933	$\frac{35933}{9284975} = 0,003870$
44	9 249 042	38 753	$\frac{38753}{9249042} = 0,004190$
45	9 210 289	41 907	$\frac{41907}{9210289} = 0,004550$

Tabelka Umieralności

Estymator prawdopodobieństwa tego że osoba dożyje do wieku $t+k$ przy warunku że dożyje do wieku t, $\sigma_{t,t+k}$, równa się proporcji osób dożywających do wieku t, które też dożyją do wieku $t+k$. Więc

$$\sigma_{t,t+k} = \frac{N_{t+k}}{N_t}.$$

Wynika z tego że prawdopodobieństwo zgonu między wiekami t a $t+k$ wynosi $\mu_{t,t+k}$, gdzie

$$\mu_{t,t+k} = 1 - \sigma_{t,t+k}.$$

Tabelka Umieralności

Należy zauważyć że obecnie intensywności zgonów są niższe niż w przeszłości, więc estymatory oparte na tabelkach umieralności ogólnie przeszacują intensywności zgonów aktualnych kohort.

Wynika z tego że opdowiednie składki też są przeszacowane.

Firmy ubezpieczeniowe często biorą pod uwagę trendy w intensywnościach zgonów aby oszacować intensywności zgonów aktualnej kohorty (nie rozważamy tych metod tutaj).

Należy zauważyć że gdy firma ubezpiecza osoby dopiero po badaniach medycznych, wtedy intensywność zgonów u nowoubezpieczonych jest niższa niż u tych, którzy się ubezpieczyli jakiś czas temu.

Składka jednorazowa

Rozważamy polisę, przy której firma wypłaci daną kwotę nominalną po śmierci ubezpieczonego, o ile umrze w danym okresie czsasu.

Cena netto takiej polisy równa się kwocie, którą należy od razu zainwestować żeby pokrywać oczekiwane koszty wypłaty w wypadku śmierci ubezpieczonego.

Zakładamy że termin składki jest na początku roku, a wypłata zajdzie pod koniec roku śmierci.

Z powodu awersji do ryzyka, firma ubezpieczeniowa zakłada że stopa procentowa będzie dosyć niska. Gdy stopa ta jest wyższa, firma zyksuje.

Ubezpieczenie na jeden rok

Zakładamy że osoba jest w wieku t, kwota nominalna do wypłacenia po śmierci ubezpieczonego wynosi K a stopa procentowa jest $100R\%$.

Odpowiednia składka, P jest

$$P = \frac{Km_t}{1+R}.$$

Należy zauważyć że $\frac{K}{1+R}$ jest kwota, którą należy od razu zainwestować aby pokryć wypłatę w wypadku śmierci, a m_t jest prawdopodobieństwem śmierci.

Przykład 4.1

Zakładamy że osoba w wieku 40 chce się ubezpieczyć na rok.

Wypłata w wypadku śmierci ma być \$100 000.

Roczna stopa procentowa jest 4% a intensywność zgonów należy oszacować za pomocą tablicy umeralności (zob. powyżej).

Wyznaczyć odpowiednią składkę jednorazową.

Przykład 4.1

Mamy

$$V = \frac{Km_{40}}{1+R},$$

where $K = 100000$, $m_{40} = 0,00302$, $R = 0,04$. Hence,

$$V = \frac{100000 \times 0,00302}{1,04} = 290,38.$$

Jednorazowa składka na dłuższy okres czasu

Zakładamy że osoba kupuje polisę w wieku t lat.

Prawdopodobieństwo tego że umrze w i-tym roku polisy (czyli w wieku $t+i-1$), p_i ($i \geqslant 1$) wyraża się wzorem

$$p_i = \frac{N_{t+i-1} - N_{t+i}}{N_t}.$$

Jest to liczba osób umierających w wieku między $t+i-1$ a $t+i$ (czyli w i-tym roku polisy) podzielona przez liczbę osób dożywających do wieku t (czyli na początku polisy).

Należy zauważyć że $p_1 = m_t$, czyli prawdopodobieństwo tego że ktoś umrze w pierwszym roku równa się intensywności zgonów w tym roku.

Jednorazowa składka na dłuższy okres czasu

Natomiast, gdy $i > 1$, prawdopodobieństwo tego że ktoś umiera w wieku $t + i - 1$ przy warunku że dożył do wieku t **nie równa się intensywności zgonów w wieku** $t + i - 1$ (prawdopodobieństwo tego że ktoś umiera przed $t + i$-tymi urodzinami przy warunku że dożył do wieku $t + i - 1$).
Gdy już mamy intensywność zgonów w wieku $t + i - 1$, możemy też wyznaczyć prawdopodobieństwo śmierci w i-tym roku polisy za pomocą następującego wzoru

$$p_i = \sigma_{t,t+i-1} m_{t+i-1} = \frac{N_{t+i-1} m_{t+i-1}}{N_t}$$

czyli prawdopodobieństwo tego że osoba dożyje do wieku $t + i - 1$ pomnożone przez intensywność zgonów w wieku $t + i - 1$.

Jednorazowa składka na dłuższy okres czasu

Zakładamy że ubezpieczony jest w wieku t, suma wypłacona w wypadku śmierci wynosi K i stopa procentowa jest $100R\%$.

Polisa ma trwać k lat.

Odpowiednia składka jest sumą k składowych, czyli $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$, gdzie

$$V_i = \frac{Kp_i}{(1+R)^i}.$$

Uwaga: Należy zauważyć że V_i jest częścią składki, która pokrywa oczekiwane koszty wynikające z możliwości śmierci w i-tym roku polisy.

Przykład 4.2

Zakładamy że osoba w wieku 40 chce ubezpieczenie życiowe na następne 3 lat.

Wypłata w wypadku śmierci wynosi \$100 000.

Roczna stopa procentowa wynosi 4% i należy oszacować intensywność zgonów za pomocą tabeli podanej powyżej.

Wyznaczyć i) prawdopodobieństwo śmierci w każdym roku polisy ii) odpowiednią składkę jednorazową.

Przykład 4.2

i) Prawdopodobieństwo śmierci w pierwszym roku równa się intensywnoći zgonów w pierwszym roku, czyli $p_1 = 0,003020$.

Prawdopodobieństwo śmierci w drugim roku równa się liczbie zgonów w drugim roku $(N_{41} - N_{42})$ podzielonej przez liczbę żyjących w wieku gdy podpisano umowę N_{40}.

$$p_2 = \frac{N_{41} - N_{42}}{N_{40}} = \frac{9348906 - 9318148}{9377225} \approx 0,003280.$$

Przykład 4.2

Prawdopodobieństwo śmierci w trzecim roku równa się liczbie zgonów w trzecim roku $(N_{42} - N_{43})$ podzielonej przez liczbę żyjących w wieku gdy podpisano umowę, N_{40}.

$$p_3 = \frac{N_{42} - N_{43}}{N_{40}} = \frac{9318148 - 9284975}{9377225} \approx 0,003538.$$

Przykład 4.2

Cena polisy równa się sumie cen składowych, $V = V_1 + V_2 + V_3$, gdzie V_i pokrywa koszt ubezpieczenia w i-tym roku, czyli

$$V_i = \frac{Kp_i}{(1+R)^i}.$$

Więc,

$$V_1 = \frac{Kp_1}{1+R} = \frac{100000 \times 0,00302}{1,04} = 290,38$$

Uwaga: V_1 jest równa (tożsamościowo) cenie polisy jednorocznej.

Przykład 4.2

Analogicznie

$$V_2 = \frac{Kp_2}{(1+R)^2} = \frac{100000 \times 0,003280}{1,04^2} = 303,26$$
$$V_3 = \frac{Kp_3}{(1+R)^3} = \frac{100000 \times 0,003538}{1,04^3} = 314,49$$

Więc cena polisy 3-letniej wynosi V, gdzie

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 290,38 + 303,26 + 314,49 = 908,13$$

Długoterminowe Polisy Życiowe

W praktyce, polisy są długoterminowe, a składki zwykle roczne lub miesięczne (zakładamy że są roczne).

Aby określić wysokość składek się uwzględnia oczekiwany czas dalszego życia, niech to będzie s (w latach).

W oparciu o to, "średnia intensywność zgonów", λ, wyraża się wzorem $\lambda = 1/s$.

Czyli jeżeli oczekiwany czas dalszego życia wynosi 50 lat, wtedy $\lambda = \frac{1}{50} = 0,02$.

Długoterminowe Polisy Życiowe

Przy założeniu że intensywność zgonów wynosi λ, prawdopodobieństwo tego że klient umiera w i-tym roku polisy wynosi $p_i = \lambda(1-\lambda)^{i-1}$.

Czyli klient przeżyje pierwsze $i-1$ lat, a umiera w następnym.

Jest to uproszczenie, które działa na korzyść ubezpieczyciela, skoro przeszacuje prawdopodobieństwo tego, że klient szybko umiera.

Uwaga: Skoro w praktyce intensywność zgonów rośnie, na początku polisy intensywność zgonów będzie relatywnie niska.

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Podstawowe równanie ubezpieczenia życiowego jest postaci

Oczekiwana wartość aktualna składek (V_P) = Oczekiwana wartość aktualna wypłaty. (V_C)

Polisa nie ma terminu ważności.

Najpierw zakładamy że roczna składka wynosi P i wyznaczamy oczekiwaną sumę wypłat (według wartości aktualnych).

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Składka P się płaci na początku każdego roku dopóki ubezpieczony żyje (czyli płaci pierwszą składkę w czasie 0, drugą w czasie 1, itp.).

Ubezpieczony jeszcze żyje na początku roku i (czyli przeżyje $i-1$ lat) z prawdopodbieństwem $(1-\lambda)^{i-1}$.

Aktualna wartość składki spłaconej na początku roku i wynosi $\frac{P}{(1+R)^{i-1}}$.

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Wynika z tego że (oczekiwana) aktualna wartość sumy składek wynosi

$$V_P = \sum_{i=1}^{\infty} P \left(\frac{1-\lambda}{1+R} \right)^{i-1} = P \times \frac{1}{1-r},$$

gdzie r jest ilorazem, czyli $r = \frac{1-\lambda}{1+R}$.

Uwaga: Jest to suma geometryczna, w której pierwszy element równa się P.

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Teraz rozważamy oczekiwaną wartość aktualną wypłaty po śmierci ubezpieczonego.

Prawdopodobieństwo tego iż ubezpieczony umiera w i-tym roku wynosi $p_i = \lambda(1-\lambda)^{i-1}$.

Skoro wypłata zachodzi na końcu tego roku, jej aktualna wartość wynosi $\frac{K}{(1+R)^i}$.

Oczekiwana wartość aktualna wypłaty wynosi

$$V_C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i K}{(1+R)^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{i-1}\lambda K}{(1+R)^i}$$

Więc

$$V_C = \frac{\lambda K}{1+R} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda}{1+R}\right)^{i-1}$$

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Jest to suma geometryczna, w której pierwszy element jest $c = \frac{\lambda K}{1+R}$.

Iloraz wynosi $r = \frac{1-\lambda}{1+R}$.

Więc

$$V_C = \frac{\lambda K}{1+R} \times \frac{1}{1-r}.$$

Skoro przy cenie sprawiedliwej $V_P = V_C$, wynika z tego że

$$P = \frac{\lambda K}{1+R}.$$

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Jest to równe składce jednorazowej w przypadku ubezpieczenia jednorocznego gdy $\lambda = m_t$.

Ma to sens, bo gdy składki są bieżące przy stałej umieralności, jest to rodzaj ciągu polis jednorocznych.

W rzeczywistości składki są stałe, ale intensywność zgonów ogólnie rośnie wraz z wiekiem.

Podstawowe Równanie Ubezpieczenia Życiowego

Składka wyznaczona w ten sposób jest na początku większa niż ta odpowiadająca intensywności zgonów na początku.

W późniejszych latach składka jest mniejsza niż by wynikało z tego wzoru.

Uwaga: Jeżeli polisa zostanie zawarta na T lat, składka byłaby taka sama.

Przykład 4.3

Wyznaczyć odpowiednią składkę roczną dla polisy bezterminowej gdy oczekiwany czas dalszego życia wynosi 40 lat, stopa procentowa jest 5% i polisa wypłaci \$300 000 po śmierci ubezpieczonego.

Przykład 4.3

Najpierw obliczamy (uśrednioną) intensywność zgonów, λ

$$
\begin{aligned}
\lambda =& 1/s = 1/40 = 0,025 \\
P =& \frac{\lambda K}{1+R} = \frac{300000/40}{1,05} \\
=& 7142,86
\end{aligned}
$$

Polisy mieszane

Wiele polis daje ubezpieczenie życiowe oraz zagwarantowana wypłata w wypadku przejścia na emeryturę.

Zakładamy że wypłata w wypadku śmierci lub przejścia na emeryturę wynosi K.

Zakładamy że osoba ma przyjść na emeryturę za T lat.

Oczekiwany czas dalszego życia wynosi s, czyli intensywność zgonów wynosi $\lambda = \frac{1}{s}$.

Polisy mieszane

Składka roczna P (płacona w czasie $0, 1, \ldots, T-1$) dzielimy na składkę ubezpieczeniową, P_u i składkę emerytalną, P_e.

Wypłatę można też podzielić na dwie części: 1) wypłata z powodu śmierci, 2) wypłata z powodu przejścia na emeryturę.

Jak poprzednio, składka, która pokrywa koszty ubezpieczenia, wynosi

$$P_u = \frac{\lambda K}{1+R}.$$

Polisy mieszane

Oczekiwana suma składek odpowiadających emeryturze (według wartości aktualnej), V_P^e, ma być równa oczekiwanej wartości aktualnej wypłaty w wypadku przejścia na emeryturę, V_C^e.

Oczekiwana wartość aktualna wypłaty w wypadku przejścia na emeryturę równa się iloczynowi prawdopodobieństwa tego że osoba przeżyje do emerytury z wartością aktualną tej wypłaty.

Prawdopodobieństwo tego że ubezpieczony przeżyje do emerytury to $(1-\lambda)^T$.

Wartość aktualna wypłaty w tym wypadku wynosi $\frac{K}{(1+R)^T}$.

Polisy mieszane

Więc

$$V_C^e = K\left(\frac{1-\lambda}{1+R}\right)^T = Kr^T,$$

gdzie $r = \frac{1-\lambda}{1+R}$.

Polisy mieszane

Oczekiwana suma składek emerytalnych (według wartości aktualnej) jest tej samej postaci co oczekiwana suma składek przy zwykłej polisie długoterminowej.

Jedyna zmiana jest to że polisa ma termin T lat, czyli

$$V_P^e = \sum_{i=1}^{T} P_e \left(\frac{1-\lambda}{1+R} \right)^{i-1} = P_e \times \frac{1-r^T}{1-r},$$

gdzie $r = \frac{1-\lambda}{1+R}$.

Polisy mieszane

Skoro $V_P^e = V_C^e$, mamy

$$P_e \times \frac{1 - r^T}{1 - r} = Kr^T$$

Wynika z tego że składka emerytalna spełnia

$$P_e = \frac{Kr^T(1 - r)}{1 - r^T}.$$

Uwaga: W praktyce wypłata w wypadku śmierci może być różna od wypłaty w wypadku przejścia na emeryturę. Skoro metoda ta raczej niedoszacowuje prawdopodobieństwo przejścia na emeryturę należy używać bardziej zaawansowanych metod wyceny, szczególnie gdy wypłata przy przejściu na emeryturę jest stosunkowo wysoka w porównaniu do wypłaty po śmierci.

Przykład 4.4

Wyznaczyć odpowiednie składki roczne dla polisy mieszanej gdy oczekiwany czas dalszego życia wynosi 40 lat, czas do emerytury wynosi 25 lata, polisa wypłaci \$300 000 po śmierci ubezpieczonego lub przy przejściu na emeryturę i stopa procentowa jest 5%.

Przykład 4.4

Składka ubezpieczeniowa: Analogicznie do Przykładu 4.3

$$\begin{aligned} \lambda &= 1/s = 1/40 = 0,025 \\ P_u &= \frac{\lambda K}{1+R} = \frac{300000/40}{1,05} \\ &= 7142,86 \end{aligned}$$

Przykład 4.4

Składka emerytalna: Czas do emerytury - $T = 25$. Iloraz r wyraża się wzorem

$$r = \frac{1-\lambda}{1+R} = \frac{39/40}{1,05} = 0,92857$$

$$P_e = \frac{Kr^T(1-r)}{1-r^T} = \frac{300000 \times 0,92857^{25}(1-0,92857)}{1-0,92857^{25}}$$
$$= 3985,12$$

Przykład 4.4

Składka całkowita jest sumą tych dwóch składek, czyli

$$P = P_e + P_u = 3985,12 + 7142,86 = 11127,98.$$