9. Funkcje Użyteczności

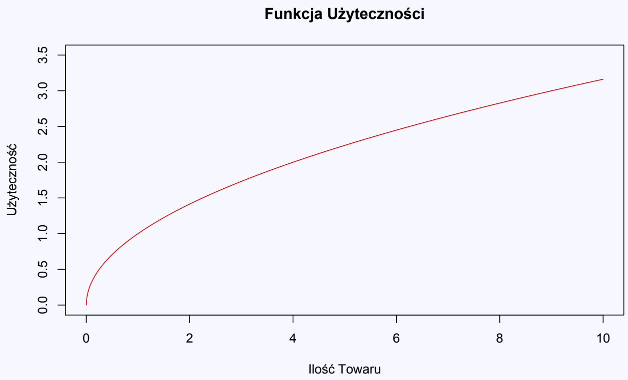
Niech $u(x)$ oznacza użyteczność wynikającą z posiadania x jednostek pewnego dobra.

Z założenia, 0 jest punktem referencyjnym, czyli $u(0) = 0$. Należy to zinterpretować jako użyteczność wynikającą z braku pewnego dobra.

u jest funkcją rosnącą ($u'(x) > 0$), czyli im więcej jakiegoś dobra osoba posiada, tym lepiej.

Zakładamy że u jest funkcją wklęsłą ($u''(x) \leqslant 0$), wtedy użyteczność z dwóch jednostek pewnego dobra jest maksymalnie dwa razy użyteczność z jednostki (innymi słowy, użyteczność krańcowa maleje względem ilości dobra już posiadanego).

Pewna Funkcja Użyteczności



Funkcje Użyteczności

Gdy nie ma żadnej losowości, wtedy maksymalizacja użyteczności, $u(x)$, jest równoważna maksymalizacji x.

Gdy zachodzi losowość, można założyć że osoba maksymalizuje $E[u(X)]$.

Natomiast, nie jest to równoważne maksymalizacji oczekiwanej ilości dobra w czyjimś posiadaniu, $E(X)$.

Należy zauważyć że mnożenie funkcji użyteczności przez dodatnią stałą nigdy nie ma wpływu na decyzję osobnika (oczekiwana użyteczność z dowolnej decyzji jest pomnożona przez tę stałą, więc ranking decyzji nie zmienia się).

Więc, możemy założyć że np. $u(1) = 1$.

Przykład 9.1

Zakładamy że osoba ma dwie możliwe decyzje:

Decyzja A : gwarantuje \$36.

Decyzja B : jeżeli wynikiem rzutu monetą jest reszta, osoba wygrywa \$100, inaczej osoba nic nie wygrywa.

a) Która z tych decyzji maksymalizuje oczekiwaną wypłatę osoby?

b) Przy założeniu że użyteczność z $\$x$ wynosi $\sqrt{x}$, która decyzja maksymalizuje oczekiwaną użyteczność osoby?

Przykład 9.1

Niech E_i będzie oczekiwaną wypłatą przy akcji i.

$$
\begin{aligned}
E_A =& 36 \\
E_B =& 0 \times 0.5 + 100 \times 0.5 = 50
\end{aligned}
$$

Więc, akcja B maksymalizuje oczekiwaną wypłatę.

Przykład 9.1

Niech U_i będzie oczekiwaną użytecznością przy akcji A.

Przy akcji A, użyteczność zawsze wynosi $\sqrt{36} = 6$. Jest to oczekiwana użyteczność, U_A.

Przy akcji B, użyteczność wynosi $\sqrt{0} = 0$ z prawdopobieństwem 0.5, i wynosi $\sqrt{100} = 10$ z prawdopobieństwem 0.5.

Więc, $U_B = 0 \times 0.5 + 10 \times 0.5 = 5$.

Wynika z tego, że akcja A maksymalizuje oczekiwaną użyteczność.

Awersja do Ryzyka

Jeżeli osoba ma neutralny stosunek do ryzyka, wtedy ona jest obojętna między wypłatą pewną a loterią, która daje tę samą wartość oczekiwaną.

Gdy funkcja użyteczności jest liniowa, czyli $u''(x) = 0$, wtedy taka osoba ma neutralny stosunek do ryzyka.

Jeżeli osoba ma awersję (niechęć) do ryzyka, wtedy ona woli wypłatę pewną od loterii, która daje tę samą wartość oczekiwaną.

Gdy funkcja użyteczności osoby jest ściśle wklęsła, $u''(x) < 0$, wtedy ona ma awersję do ryzyka (np. gdy $u(x) = \sqrt{x}$ w Przykładzie 9.1, osoba woli wypłatę pewną od loterii, która daje nawet większą wartość oczekiwaną).

Chęć do ryzyka

Jeżeli osoba się charakteryzuje chęcią do ryzyka, wtedy woli loterię od wypłaty pewnej, która równa się wartości oczekiwanej wypłaty z loterii.

Według klasycznej teorii użyteczności, osoby albo mają neutralny stosunek do ryzyka albo mają awersję do ryzyka.

Natomiast, dużo osób często charakteryzuje się chęcią do ryzyka (kupują losy na loterię, zakłady sportowe).

Chęć do ryzyka

Założenie że $u(2x) \leqslant 2u(x)$, czyli użyteczność z dwóch jednostek jest maksymalnie dwa razy użyteczność z jednostki wydaje się rozsądnie.

Więc, relatywnie wysoki poziom chęci do ryzyka musi wyniknąć z innego czynnika, którego funkcja użyteczności nie bierze pod uwagę.

Może to wynika z faktu że osoby "dostają" pewną użyteczność, gdy wygrywają jakiś zakład (lub gdy zakładają o wynik meczu, emocje z oglądania tego meczu są większe).

Po drugie, osoby mogą "przeszacować" małe prawdopodobieństwa (ale też można argumentować że w przypadku loterii jest to związane z wpływem emocji na użyteczność).

Wielowymiarowe Funkcje Użyteczności

Własności wielowymiarowych funkcji użyteczności są bardzo podobne do własności jednowymiarowych funkcji użyteczności.

Rozważamy tylko funkcje dwóch zmiennych $u(x, y)$.

$u(x, y)$ rośnie względem każdego argumentu (przy ustalonej wartości drugiej zmiennej), czyli $u_x(x, y) > 0$ oraz $u_y(x, y) > 0$ (indeksy oznaczają różniczkowanie po odpowiedniej zmiennej).

$u(x, y)$ jest wklęsłe względem każdego argumentu (przy ustalonej wartości drugiej zmiennej), czyli $u_{xx}(x, y) \leqslant 0$ oraz $u_{yy}(x, y) \leqslant 0$.

Ten ostatni warunek mówi że użyteczność krańcowa z dodatkowej jednostki danego towaru jest malejąca przy ustalonej ilości drugiego towaru.

Wielowymiarowe Funkcje Użyteczności

Zakładamy że $u(0,0) = 0$.

Jak stwierdzono wcześniej, pomnożenie przez stałą nie zmienia rankingu decyzji, więc możemy przeskalować funkcje użyteczności w dowolny sposób, np. założyć że $u(1,1) = 1$.

Należy zauważyć że w wypadku jednowymiarowej funkcji użyteczności, warunki podane powyżej są wystarczające żeby efekt skali zawsze był negatywny, czyli gdy stan posiadania się podwaja, wtedy wartość funkcji użyteczności maksymalnie się podwaja.

W przypadku funkcji wielowymiarowych, ten warunek nie jest automatycznie spełniony. Więc należy dodatkowo założyć że efekt skali jest negatywny, mianowicie że dla $k > 1$, $u(kx, ky) \leqslant ku(x, y)$.

Wielowymiarowe Funkcje Użyteczności

Na przykład, $u(x, y) = x^{0.75}y^{0.75}$ spełnia warunki o monotoniczności i wklęsłości.

Natomiast,

$$\begin{aligned} u(kx, ky) &= (kx)^{0.75}(ky)^{0.75} = k^{1.5}x^{0.75}y^{0.75} \\ &= k^{1.5}u(x, y) > ku(x, y), \text{ gdy } k > 1. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, gdy $a, b > 0$ oraz $a + b \leqslant 1$, wtedy $u(x, y) = x^a y^b$ spełnia wszystkie własności funkcji użyteczności.

9.2 Maksymalizacja użyteczności przy ograniczonym budżecie

Wielowymiarowa funkcja użyteczności opisuje (do pewnego stopnia) preferencje osoby.

Na przykład, gdy x oznacza liczbę jabłek oraz y liczbę bananów oraz niech $0 < \alpha \leqslant 1$:

1. $u(x, y) = x^{\alpha} + y^{\alpha}$ - Osoba ogólnie nie woli jabłek od bananów lub odwrotnie (funkcja użyteczności jest symetryczna wobec x i y).
2. $u(x, y) = x^{\alpha}$ - Osoba po prostu nie lubi bananów (nie uzyskuje żadnej użyteczności z nich).
3. $u(x, y) = 3x^{\alpha} + y^{\alpha}$ - Osoba woli jabłka (przypisuje im większą wagę w funkcji użyteczności), ale przypisuje pewną wartość różnorodności.

Im większa α, tym "większy apetyt" osoby (użyteczność krańcowa maleje bardzo powoli).

Maksymalizacja użyteczności przy ograniczonym budżecie

Oczywiście, gdy osoba ma wybór między różnymi koszykami towarów, wybrałaby ten, który daje największą użyteczność.

W praktyce, osoba powinna zmaksymalizować swoją użyteczność przy danym budżecie.

Niech koszt jednostki towaru 1 będzie k_1, koszt jednostki towaru 2 będzie k_2, a budżet osoby c.

Gdy osoba kupuje x jednostek towaru 1 oraz y jednostek towaru 2, ograniczenie budżetowe można przedstawić jako

$$k_1 x + k_2 y \leqslant c$$

Maksymalizacja użyteczności przy ograniczonym budżecie

Najpierw, zakładamy że x oraz y mogą przyjąć dowolne wartości nieujemne. Problem maksymalizacji użyteczności przyjmuje następującą postać

$$\max u(x, y)$$

przy warunku

$$k_1 x + k_2 y \leqslant c$$

Graficznie, granica obszaru spełniającego ograniczenie budżetowe jest prostą o ujemnym nachyleniu.

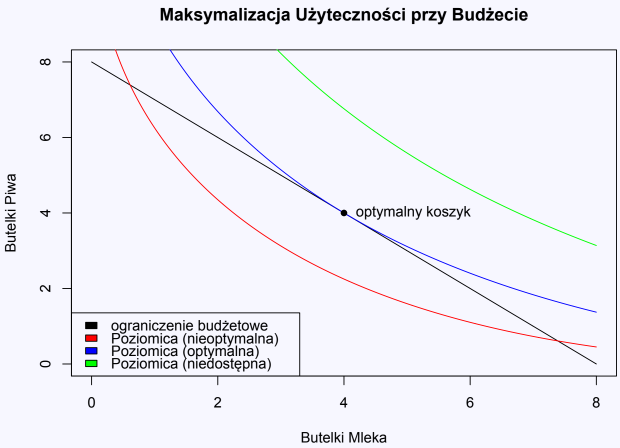
Gdy funkcja użyteczności $u(x, y)$ jest ściśle wklęsła względem swoich argumentów, czyli $u_{xx}(x, y) < 0$ oraz $u_{yy}(x, y) < 0$, wtedy wszystkie poziomice funkcji użyteczności, czyli wszystkie krzywe postaci $u(x, y) = K$, są wypukłe.

Maksymalizacja użyteczności przy ograniczonym budżecie

Rozwiązanie tego problemu, (x^*, y^*), odpowiada najwyższej poziomicy, która dotyka granicy obszaru spełniającego ograniczenie budżetowe. (zob. następujący slajd).

Decydenta nie stać na żaden koszyk towarów, który daje wyższą użyteczność

Maksymalizacja użyteczności przy ograniczonym budżecie - Interpretacja graficzna



Maksymalizacja użyteczności przy ograniczonym budżecie - Rozwiązanie analityczne

Intuicyjnie, gdy x i y mogą przyjąć dowolną wartość nieujemną, wtedy decydent wydaje cały swój budżet.

Wynika z tego że $k_1 x + k_2 y = c$, więc $y = \frac{c - k_1 x}{k_2}$.

Korzystając z tego równania, możemy zredukować problem do zagadnienia, według którego maksymalizujemy funkcję jednej zmiennej, mianowicie

$$\max u\left(x, \frac{c - k_1 x}{k_2}\right).$$

Maksymalizacja gdy można tylko kupić całkowitą liczbę jednostek

Zakładamy że towar 1 jest droższy niż towar 2 oraz przy danym budżecie można kupić maksymalnie n jednostek towaru 1, gdzie $n = \left\lfloor \frac{c}{k_1} \right\rfloor$ oraz $\lfloor \ \rfloor$ oznacza część całkowitą.

Potem porównujemy użyteczność następujących $n+1$ koszyków towarów:

$$(x, y) \in \{(0, m[0]), (1, m[1]), (2, m[2]), \ldots, (n, m[n])\},$$

gdzie $m[x]$ jest maksymalną liczbą jednostek towaru 2, którą można kupić gdy decydent kupuje x jednostek towaru 1, czyli $m[x] = \left\lfloor \frac{c-k_1 x}{k_2} \right\rfloor$.

Uwaga: Zakładamy że decydent nie ma żadnej użyteczności z reszty, która pozostaje mu po transakcji.

Przykład 9.2

Niech użyteczność osoby z koszyka zawierającego x jabłek i y pomarańczy będzie $u(x, y) = 3\sqrt{x} + \sqrt{y}$.

i) Czy osoba ta wolałaby koszyk zawierający 4 jabłka oraz 1 pomarańczę lub koszyk zawierający 1 jabłko oraz 9 pomarańczy?

ii) Niech jabłko kosztuje 1zł, a pomarańcza kosztuje 50 groszy. Gdy osoba posiada 4zł, jaki koszyk zawierający jabłka i pomarańcze by zmaksymalizował jej użyteczność? (należy założyć że trzeba kupić całkowitą liczbę jabłek oraz pomarańczy oraz nie ma użyteczności z reszty po zakupach)

iii) Przy założeniu że można kupić dowolną ilość tych towarów, wyznaczyć optymalny koszyk.

Przykład 9.2

i) Wyznaczamy użyteczności tych dwóch koszyków. Należy wybrać koszyk o największej użyteczności.

$$u(4,1) = 3 \times 2 + 1 = 7$$
$$u(1,9) = 3 \times 1 + 3 = 6$$

Osoba woli pierwszy koszyk, czyli 4 jabłka oraz pomarańcza.

Przykład 9.2

ii) Skoro jabłka kosztują więcej, wyznaczamy ile można kupić jabłek. Mamy $x_{max} = \frac{k}{c_1} = 4$, gdzie k oznacza budżet, a c_1 koszt jabłka.

Wynika z tego, że maksymalnie można kupić 4 jabłka.

Przykład 9.2

Więc należy rozważyć 5 koszyków (zob. tabelę).

Jabłka, x	Reszta	Pomarańcze, y	$u(x,y)$
0	4	8	$\sqrt{8} \approx 2.8284$
1	3	6	$3+\sqrt{6} \approx 5.4495$
2	2	4	$3\sqrt{2}+2 \approx 6.2426$
3	1	2	$3\sqrt{3}+\sqrt{2} \approx 6.6104$
4	0	0	6

Więc optymalny koszyk zawiera 3 jabłka oraz 2 pomarańcze.

Przykład 9.2

iii) Celem jest $\max u(x, y)$, gdzie $u(x, y) = 3\sqrt{x} + \sqrt{y}$, przy ograniczeniu budżetowym

$$x + 0.5y = 4.$$

Z ograniczenia budżetowego możemy napisać x jako funkcję y, czyli $x = 4 - 0.5y$.

Podstawiamy to do funkcji użyteczności i maksymalizujemy to jako funkcję y.

Przykład 9.2

$$g(y) = u(4 - 0.5y, y) = 3\sqrt{4 - 0.5y} + \sqrt{y}$$

Różniczkując,

$$g'(y) = \frac{3 \times 0.5 \times (-0.5)}{\sqrt{4 - 0.5y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Przyrównując pochodną tę do zera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{y}} &= \frac{0.75}{\sqrt{4 - 0.5y}} \\
\sqrt{4 - 0.5y} &= \frac{3}{2}\sqrt{y} \\
4 - 0.5y &= \frac{9y}{4}.
\end{aligned}$$

Przykład 9.2

$$16 - 2y = 9y \Rightarrow y = \frac{16}{11}.$$

Z ograniczenia budżetowego

$$x = 4 - 0.5y = 4 - \frac{8}{11} = \frac{36}{11}.$$