Definicja Gry Matematycznej

Gra matematyczna spełnia następujące warunki:

a) Jest co najmniej dwóch "racjonalnych" graczy.

b) Zbiór możliwych dezycji każdego gracza zawiera co najmniej dwie akcje.

c) (Oczekiwana) wypłata gracza istotnie zależy od zarówno swojej akcji jak i akcji pozostałych graczy.

Definicja Gry Matematycznej

Według takiej definicji, ruletka nie jest grą matematyczną, skoro oczekiwana wypłata zależy tylko od strategii używanej przez samego gracza, a nie od strategii używanych przez pozostałych graczy.

Loteria (Totolotka) jest grą matematyczną (o ile że nikt nie może zrezygnować z loterii). Prawdopodobieństwo tego że osoba wygra loterię nie zależy od strategii pozostałych graczy. Natomiast osoba maksymalizuje swoją wypłatę, gdy wybiera liczby, które nie są wybrane przez innych graczy.

(prawdopodobieństwo tego że osoba wygra loterię zawsze będzie taka sama, ale gdy osoba trafi, wtedy musi podzielić pulę z innymi, którzy tak samo wybrali).

Postać Macierzowa Gry 2-Osobowej

Zakładamy że każdy gracz podejmuje decyzję z skończonego zbioru akcji.

Każdy wiersz macierzy gry 2-osobowej odpowiada akcji gracza 1, a każda kolumna odpowiada akcji gracza 2.

Każda komórka macierzy gry zawiera wektor wypłat, i-ta składowa tego wektora jest wypłatą i-tego gracza.

Postać Macierzowa Gry 2-Osobowej

Na przykład, następna macierz określa grę typu "Jastrząb - Gołąb"

	J	G
J	(-2,-2)	(4,0)
G	(0,4)	(2,2)

Na przykład, gdy gracz 1 wybiera J a gracz 2 wybiera G, gracz 1 otrzymuje wypłatę 4 a gracz 2 otrzymuje wypłatę 0.

Postać Macierzowa Gry 2-Osobowej

Ogólnie, dwuosobowa gra macierzowa jest opisana przez

1. Zbiór możliwych akcji gracza 1, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.
2. Zbiór możliwych akcji gracza 2, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
3. Macierz z $m \times n$ wektorami dwuwymiarowymi, która określa wypłaty obu graczy przy każdej kombinacji akcji. Wypłata gracza k gdy gracz 1 wybiera a_i a gracz 2 wybiera b_j jest oznaczona przez $R_k(a_i, b_j)$.

Postać Macierzowa Gry 2-Osobowej

Zaletą postaci macierzowej jest swoja prostota.

Wada jest to, że zakłada iż gracze wybierają swoje akcje jednocześnie. Czyli akcje można zinterpretować jako strategie, które są wybrane na początku gry.

Później, rozróżnimy pojęcie akcji od pojęcia strategii.

Gry o Sumie Stałej

Gra jest grą o sumie stałej, gdy suma wypłat jest stała (czyli nie zależy od kombinacji akcji).

Gra jest grą o sumie zerowej, gdy suma wypłat zawsze równa się 0 (niezależnie od kombinacji akcji).

Gra o sumie stałej k nie różni się istotnie od gry o sumie zerowej. Sędzia mógłby dać każdemu graczowi $k/2$ i sprawić że gracze grają w grę gdzie wszystkie wypłaty są obniżone o $k/2$ (jest to gra o sumie zerowej).

Gry 2-osobowe o sumie stałej są grami ściśle konkurencyjnymi. Gdy jeden gracz zyska, drugi gracz z definicji straci tyle samo.

Gra w Postaci Rozszerzonej (Ekstensywnej)

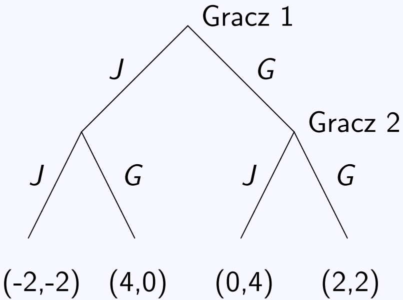
W wielu przypadkach, np. szachy, ruchy są sekwencyjne.

Można opisać taką grę za pomocą drzewa graficznego. Każdy wierzchołek reprezentuje stan gry przed ruchem danego gracza.

Każda krawędź reprezentuje możliwy ruch gracza w tym stanie.

Każdy wierzchołek krańcowy reprezentuje pewien stan końcowy i odpowiada wektorowi wypłat.

Asymetrzyczna Gra "Jastrząb - Gołąb"



Asymetrzyczna Gra "Jastrząb - Gołąb"

W takiej grze najpierw gracz 1 decyduje czy ma grać J czy grać G.

Gracz 2 obserwuje decyzję gracza 1 a potem decyduje czy ma grać J czy grać G.

Na przykład, gdy gracz 1 wybiera J a gracz 2 wybiera G, wtedy gracz 1 dostanie wypłatę 4 a gracz 2 dostanie wypłatę 0.

Asymetrzyczna Gra "Jastrząb - Gołąb"

Pozornie, gra ta wygląda identycznie do gry macierzowej "Jastrząb - Gołąb" opisanej powyżej.

Aby zrozumieć na czym polega różnica między tymi grami, trzeba rozróżnić strategie od akcji.

Gdy gra jest opisana w postaci ekstensywnej, strategia gracza określa, która decyzja ma zostać podjęta we wszystkich wierzchołkach gdzie gracz ma podjąć decyzję.

Akcja wynika z pojedynczej decyzji.

Asymetrzyczna Gra "Jastrząb - Gołąb"

W tej grze, najpierw gracz 1 wybiera albo J albo G. To jego jedyny wybór. Więc strategie gracza 1 odpowiadają jego możliwym akcjom (J i G).

Natomiast, skoro gracz 2 obserwuje decyzję gracza 1, decyzja gracza 2 może uwzględnić decyzję gracza 1.

Dla obu decyzji gracza 1, gracz 2 ma dwie możliwe decyzje. Więc, ma $2 \times 2 = 4$ możliwe strategie.

Są one opisane na następnym slajdzie.

Asymetryczna Gra "Jastrząb - Gołąb"

W tej grze asymetrycznej, zbiór strategii gracza 2 jest następujący:

1. $J|J, J|G$, czyli grać J gdy gracz 1 wybiera J a grać J gdy gracz 1 wybiera G, innymi słowy zawsze grać J.
2. $J|J, G|G$, czyli podjąć tę samą decyzję co gracz 1.
3. $G|J, G|G$, czyli zawsze wybrać G.
4. $G|J, J|G$, czyli wybrać G gdy gracz 1 wybiera J a grać J gdy gracz 1 wybiera G.

W grze macierzowej opisanej powyżej, decyzja gracza 2 nie może uwzględnić decyzji gracza 1. Więc w tym przypadku, gracz 2 ma tylko dwie możliwe strategie, które opowiadają jego decyzjom, J oraz G.

Ruchy Symultaniczne i Gry w Postaci Ekstensywnej

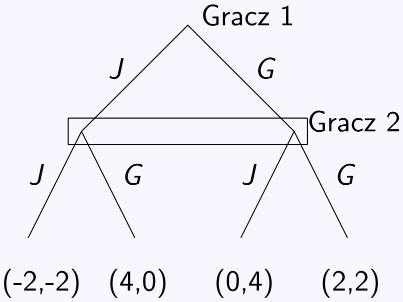
Chociaż gra w postaci ekstensywnej zwykle opisuje gry, w których decyzje są podjęte jedna po drugiej, można zaadaptować opis takich gier aby uwzględnić możliwość symultanicznych ruchów.

Się robi to za pomocą tak zwanych "zbiorów informacyjnych". Zakładamy że dwa wierzchołki reprezentują stany, w których poszczególny gracz ma podjąć decyzję a gracz ten nie może rozróżniać jednego stanu od drugiego.

Wtedy wierzchołki te należą do tego samego **zbioru informacyjnego**. W postaci ekstensywnej zbiór informacyjny jest umieszczony w jednym "pudełku".

Decyzja gracza może uwzględnić tylko zbiór informacyjny, w którym obecnie się znajduje.

Symetrzyczna Gra "Jastrząb - Gołąb" w Postaci Ekstensywnej



W tym przypadku obaj gracze mają dwie możliwe strategie: J i G.

Przekształcenie z Postaci Ekstensywnej w Postać Macierzową

Aby przekształcić z postaci ekstensywnej w postać macierzową:

1. Sporządzić listę strategii obu graczy
2. W postaci macierzowej, wiersze odpowiadają strategiom gracza 1 a kolumny odpowiadają strategiom gracza 2.
3. Wyznaczamy wektor wypłat odpowiadający każdej parze strategii (para strategii zawsze definiuje jakie decyzje zostaną podjęte).

Przekształcenie z Postaci Ekstensywnej w Postać Macierzową

Należy zauważyć że każda gra w postaci ekstensywnej ma jednoznaczną postać macierzową (poza tym że można inaczej oznaczyć i uporządkować strategie).

Natomiast, mogą istnieć różne gry w postaci ekstensywnej, które mają tę samą postać macierzową.

Więc, ogólnie nie można przekształcić z postaci macierzowej w postać ekstensywną.

Intuicyjnie, wynika to z faktu że postać ekstensywna daje więcej informacji o sposobie, w który się gra w pewną grę.

Przykład 10.1 - Przekształcenie Asymetrycznej Gry "Jastrząb-Gołąb" z Postaci Ekstensywnej w Postać Macierzową

Najpierw, rozważamy jakie strategie są stosowalne przez obu graczy.

Gracz 1 po prostu wybiera jedną akcję spośród J a G. Więc oznaczamy jego strategie czyste jako J i G, odpowiednio.

Przykład 10.1

Tak jak opisano powyżej, gracz 2 może oprzeć wybór akcji na wyborze gracza 1. Więc gracz 2 ma 4 możliwe strategie czyste (opisane poniżej)

1. Zawsze wybrać J, czyli $(J|J, J|G)$.
2. Zawsze wybrać G, czyli $(G|J, G|G)$.
3. Wybrać tę samą akcję co gracz 1, czyli $(J|J, G|G)$.
4. Wybrać "odwrotnie" do gracza 1, czyli $(G|J, J|G)$.

Przykład 10.1

W oparciu o strategie stosowane przez graczy, można określić, która para akcji zostanie podjęta.

Można to przedstawić w postaci macierzowej. Wiersze odpowiadają strategiom gracza 1, a kolumny odpowiadają strategiom gracza 2.

	Zawsze J	Zawsze G	Tak jak gracz 1	Odwrotnie do gracza 1
J	(J, J)	(J, G)	(J, J)	(J, G)
G	(G, J)	(G, G)	(G, G)	(G, J)

Przykład 10.1

Wypłaty graczy odpowiadają parze akcji podjętej. Więc macierz wypłat jest

	Always J	Always G	Tak jak gracz 1	Odwrotnie do gracza 1
J	$(-2,-2)$	$(4,0)$	$(-2,-2)$	$(4,0)$
G	$(0,4)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(0,4)$

Informacja Pełna a Informacja Doskonała

Gra jest grą z **pełną informacją** gdy obaj gracze wiedzą jakie strategie są dostępne innym graczom i znają wektory wypłat przy każdej możliwej kombinacji strategii.

W dodatku, gdy każdy gracz wie, na którym wierzchołku się znajduje w postaci ekstensywnej gdy ma podjąć decyzję, wtedy jest to gra z **doskonałą informacją**.

Informacja Pełna a Informacja Doskonała

Na przykład, szachy są grą z doskonałą informacją (przy założeniu że wypłata jest 1 gdy się wygrywa, 0,5 gdy się remisuje a 0 gdy się przegrywa), skoro stan gry jest zawsze znany obu graczom i każdy gracz wie jakie ruchy są dostępne drugiemu graczowi.

Brydż nie jest grą z doskonałą informacją, skoro gracz nie wie jak są podzielone karty wśród pozostałych graczy.

Z drugiej strony, można argumentować że jest to gra z pełną informacją, skoro punktacja jest dobrze zdefiniowana i gracze wiedzą jak inni mogą grać (chociaż pełny opis strategii jest bardzo złożony).

Rozwiązywanie Gier z Doskonałą Informacją

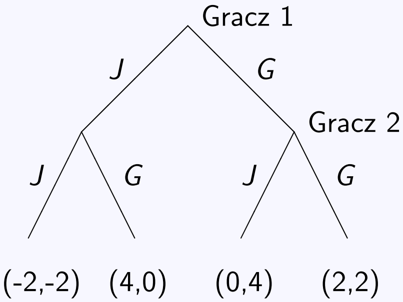
W grach z doskonałą informacją, ruchy są wykonane po kolei oraz każdy z wcześniejszych ruchów jest znany obu graczom.

Można rozwiązać takie gry za pomocą rekursji w oparciu o postać ekstensywną.

Rozaważamy dwa pojęcia rozwiązania takiej gry w oparciu o asymetryczną grę "Jastrząb-Gołąb"

1. Rozwiązanie minimaksowe.
2. Równowaga Nasha.

Asymetrzyczna Gra "Jastrząb - Gołąb"



Rozwiązanie minimaksowe

Przy rozwiązaniu minimaksowym, gracz i zakłada że gracz j ma na celu zminimalizowanie wypłaty gracza i.

Gracz i maksymalizuje swoją wypłatę przy tym założeniu.

Więc gracz, który wykonuje ostatni ruch, po prostu maksymalizuje swoją wypłatę przy poprzednich decyzjach.

Rozwiązanie minimaksowe

W asymetrycznej grze "Jastrząb-Gołąb"

Gdy gracz 1 wybrał J, gracz 2 powinien wybrać G (dostanie wypłatę 0 zamiast -2).

Gdy gracz 1 wybrał G, gracz 2 powinien wybrać J (dostanie wypłatę 4 zamiast 2).

Więc optymalną strategią gracza 2 jest $(G|J, J|G)$, czyli G po J, a J po G.

Rozwiązanie minimaksowe

Gracz 1 zakłada że gracz 2 chce zminimalizować jego wypłatę. Więc gracz 1 powinien rozważyć minimalną z możliwych wypłat wynikających z danej akcji.

Gdy gracz 1 wybiera J, jego minimalna wypłata wynosi -2 (gdy gracz 2 też wybiera J).

Gdy gracz 1 wybiera G, jego minimalna wypłata wynosi 0 (gdy gracz 2 wybiera J).

Wynika z tego iż gracz 1 powinien wybrać G.

Rozwiązanie minimaksowe

Więc przy rozwiązaniu minimaksowym, gracz 1 powinien wybrać G. Gdy gracz 1 wybrał J, gracz 2 powinien wybrać G a gdy gracz 1 wybrał G, gracz 2 powinien wybrać J, czyli gracz 2 korzysta z strategii $(G|J, J|G)$.

Należy zauważać że para akcji wykonanych przy tych strategii jest (G, J), czyli gracz 1 wybiera G, a gracz 2 wybiera J.

Równowaga Nasha

Przy równowadze Nasha, gracz i zakłada że inny gracz, gracz j, chce zmaksymalizować swoją wypłatę. Gracz i maksymalizuje swoją wypłatę przy tym założeniu.

Skoro gracz 2 maksymalizuje swoją wypłatę przy decyzji gracza 1 (już podjętej), analiza ruchu gracza 2 jest identyczna do tej dla rozwiązania minimaksowego.

Czyli, jak poprzednio, gdy gracz 1 wybrał J, gracz 2 wybiera G.

Gdy gracz 1 wybrał G, gracz 2 wybiera J.

Równowaga Nasha

Wracając do pierwszego ruchu, gracz 1 zakłada iż gracz 2 korzysta z optymalnej odpowiedzi (która maksymalizuje wypłatę gracza 2).

Więc, gdy gracz 1 wybiera J, gracz wybiera G a gracz 1 otrzymuje wypłatę 4.

Gdy gracz 2 wybiera G, gracz wybiera J a gracz 1 otrzymuje wypłatę 0.

Wynika z tego iż gracz 1 powinien wybrać J.

Równowaga Nasha

Więc przy równowadze Nasha, gracz 1 powinien wybrać J. Gdy gracz 1 wybrał J, gracz 2 powinien wybrać G a gdy gracz 1 wybrał G, gracz 2 powinien wybrać J, czyli gracz 2 korzysta z strategii $(G|J, J|G)$.

Więc para akcji wykonanych przy równowadze Nasha jest (J, G), czyli gracz 1 wybiera J, a gracz 2 wybiera G.

Istnienie rozwiązania - minimaksowe, równowaga Nasha

Można pokazać że zawsze istnieje rozwiązanie (minimaksowe lub równowaga Nasha) gry z doskonałą informacją.

Jeżeli gracze nie są obojętni wobec dwóch różnych akcji, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie (przy danym pojęciu rozwiązania).

Każdy wektor wypłat odpowiadający rozwiązaniu takiej gry nazywamy **wartością** gry (wartością minimaksową lub Nasha, jak odpowiednio).

Ścieżka akcji przy równowadze oraz równowaga doskonała w podgrach

Zbiór akcji obserwowanych przy równowadze Nasha gry z doskonałą informacją nazywamy **ścieżką akcji przy równowadze**.

W asymetrycznej grze "Jastrząb-Gołąb", ścieżka przy równowadze jest (J, G).

Wartość Nasha jest $(4, 0)$ [analogicznie wartość minimaksowa jest $(0, 4)$].

Z drugiej strony, ścieżka ta nie opisuje jak gracz 2 powinien reagować na "błędy" gracza 1, czyli jak gracze powinni się zachować poza tą ścieżką.

Się mówi że równowaga jest doskonała w podgrach, gdy zaczynając od dowolnego wierzchołka drzewka opisującego grę, gracze grają według równowagi Nasha dla odpowiedniej podgry.

Ścieżka akcji przy równowadze oraz równowaga doskonała w podgrach

W tym przypadku należy podać optymalną odpowiedź gracza 2 na każdą akcję gracza 1 oraz optymalną akcję gracza 1.

Akcje te zostały wyznaczone za pomocą procedury rekursywnej.

Najlepszą odpowiedzią gracza 2 na J jest G, a jego najlepszą odpowiedzią na G jest J.

Więc strategią gracza 2 w równowadze doskonałej jest $(G|J, J|G)$.

Strategią gracza 2 w równowadze doskonałej jest J.