Matematyka Ekonomiczna

David Ramsey, Prof. PWr

e-mail: david.ramsey@pwr.edu.pl
strona domowa: www.wiz.pwr.edu.pl/pracownicy/david-ramsey
Pokój 5.16, B-4
Godziny konsultacji: środa 11-13,
czwartek 16-18

1-wszy października, 2020

Zarys Kursu

1. Stopy procentowe, inflacja i dyskontowanie
2. Wartość aktualna ciągu przyszłych wypłat. Ubezpieczenie życiowe.
3. Teoria podaży i popytu.
4. Podatki (bezpośrednie i pośrednie).
5. Wstęp do teorii decyzji.
6. Wstęp do teorii gier.
7. Zastosowanie teorii gier w ekonomii.

1.1 Nominalna i aktualna wartość przychodów

Nawet gdy nie ma inflacji, "racjonalna osoba" woli dostać 100zł dzisiaj niż za miesiąc.

Wynika to z dwóch czynników

1. Mogę korzystać z tych pieniędzy teraz, a nie dopiero za miesiąc.
2. Niepewność. Czy naprawdę za miesiąc dostanę te pieniądze?

Nominalna wartość pieniędzy (np. wartość podana na banknocie lub monecie) nie zmienia się w czasie. Tutaj to 100zł.

Dyskontowanie przyszłych dochodów

Fakt że rzeczywista wartość pieniędzy zależy od czasu jest najłatwiej odzwierciedlony za pomocą dyskontowania wykładniczego (geometrycznego).

Aktualna wartość przychodu o wartości x, który ma zajść za t jednostek czasowych, wynosi $V(x;t)$, gdzie

$$V(x;t) = x\alpha^t,$$

α jest czynnikiem dyskontującym (dyskontem), $0 < \alpha < 1$.

Aby porównać dwie oferty, które mają zajść w różnych czasach, porównujemy wartości aktualne tych ofert.

Gdy aktualne wartości dwóch ofert są równe, się mówi że osoba jest obojętna wobec tych ofert.

Przykład 1.1

Zakładamy że dyskonto (roczne) wynosi 0,9.

Wyznaczyć aktualną wartość kwoty 100zł, którą osoba ma dostać za t lat, gdzie $t = 1, 2, 3$.

Przykład 1.1

$$V(100;1) = 100 \times 0.9 = 90$$
$$V(100;2) = 100 \times 0.9^2 = 81$$
$$V(100;3) = 100 \times 0.9^3 = 72.90$$

Zmiana jednostki czasu

Zwykle się określa dyskonto w skali rocznej, α.

Czasami chcemy określić dyskonto w skali miesięcznej lub dziennej.

Zakładamy że rok składa się z k jednostek czasu (np. gdy jednostka jest miesiąc, $k = 12$), wtedy dyskonto na jednostkę czasu wynosi α_p, gdzie

$$\alpha_p = \sqrt[k]{\alpha}$$

oraz α jest dyskontem w skali rocznej.

Zmiana jednostki czasu

Zakładamy że dyskonto w skali rocznej jest 0,9. Wtedy, dyskonto w skali miesięcznej wynosi

$$\alpha_p = \sqrt[12]{0,9} \approx 0,99126.$$

Uwaga: na skali rocznej (12 miesięcy), dyskonto wynosi $\alpha_p^{12} = 0,9$.

Zalety dyskontowania wykładniczego

Dyskontowanie wykładnicze posiada własność zwaną "spójnością czasową", czyli

Gdy osoba jest obojętna wobec wyboru: i) x_1 teraz, lub ii) x_2 za t jednostek czasu

wtedy osoba ta jest obojętna wobec wyboru: i) x_1 za k jednostek czasu, a ii) x_2 za $k + t$ jednostek czasu.

Czyli wybór zależy tylko od odległości czasowej między realizacjami tych ofert.

Zalety dyskontowania wykładniczego

Na przykład, gdy osoba jest obojętna wobec wyboru: i) 90zł dzisiaj, lub ii) $100 za rok,

wtedy, przy dyskontowaniu wykładniczym, będzie obojętna wobec wyboru: i) 90zł za 5 lat, lub ii) $100 za 6 lat.

Uwaga: zwrot "obojętna wobec" możemy zastąpić "woli ... od" lub "nie woli ... od" a argument wciąż zachodzi.

Wady dyskontowania wykładniczego

W rzeczywistości, natychmiastowe wypłaty są bardziej premiowane niż wynika z metody dyskontowania wykładniczego, np. następujące preferencje są dosyć często spotykane.

a) osoba woli dostać 90zł teraz niż 100zł za rok, ale

b) nie woli dostać 90zł za 5 lat niż 100zł za 6 lat.

Takie preferencje są niedopuszczalne przy dyskontowaniu wykładniczym.

Dyskontowanie kwasi-hyperboliczne

Przy dyskontowaniu kwasi-hyperbolicznym, aktualna wartość przychodu x, który ma zajść za t jednostek czasu, gdzie $t > 0$, wynosi $V(x; t)$, gdzie

$$V(x; t) = x\beta\alpha^t,$$

$0 < \alpha < 1$ oraz $0 < \beta \leqslant 1$.

Parametr β opisuje stopień promowania natychmiastowych wypłat.

Im większe β, tym bardziej cierpliwa jest osoba ta (tym mniej promuje natychmiastowe wypłaty).

$\beta = 1$ odpowiada dyskontowaniu wykładniczemu.

1.2 Oprocentowanie proste i złożone

Gdy inwestujemy pieniądze, oczekujemy żeby nominalna wartość tej inwestycji rośnie względem czasu (i żeby wartość aktualna przynajmniej nie malała).

Zakładamy że się stosuje oprocentowanie proste o rocznej stopie procentowej $100R\%$ do pewnej inwestycji o wstępnej wartości x

Wtedy, nominalna wartość inwestycji rośnie o Rx co roku.

Czyli oprocentowanie zawsze jest obliczone na bazie wstępnej kwoty.

Oprocentowanie proste

Wynika z tego że wartość nominalna inwestycji wstępnej kwoty x przy oprocentowaniu prostym o stopie $100R\%$ po t jednostkach czasowych wynosi

$$I(x;t) = x(1 + Rt)$$

Uwaga: gdy zastosowano oprocentowanie proste o stopie 5% rocznej, wtedy inwestycja wstępnej kwoty 100zł rośnie o 5zł rocznie.

Oprocentowanie złożone

W praktyce, zastosowano oprocentowanie złożone.

Zakładamy że zastosowano oprocentowanie złożone o rocznej stopie $100R\%$ wobec inwestycji wstępnej kwoty x

Wtedy wartość nominalna tej inwestycji jest pomnożona przez $(1+R)$ co jednostkę czasu.

Czyli oprocentowanie zawsze dotyczy obecnej wartości nominalnej inwestycji.

Oprocentowanie złożone

Wynika z tego że gdy zastosowano oprocentowanie złożone o stopie $100R\%$, po t jednostkach czasu wartość nominalna inwestycji o wstępnej wartości x wynosi

$$I(x;t) = x(1+R)^t$$

Przykład 1.2

Zakładamy że zainwestowano 1000zł.

Wyznaczyć nominalną wartość inwestycji i) po 3 latach, ii) po 7 miesiącach.

gdy oprocentowanie jest
a) proste o stopie 5% rocznie,
b) złożone o stopie 3% rocznie

Przykład 1.2

a)

$$V(x;t) = x(1 + Rt), \qquad R = 0.05$$

$$i) \qquad V(1000;3) = 1000(1 + 3 \times 0.05) = 1150$$

$$ii) \qquad V(1000;7/12) = 1000\left(1 + \frac{7 \times 0.05}{12}\right) = 1029.17$$

Przykład 1.2

b)

$$V(x;t)=x(1+R)^t, \qquad R=0.03$$

$$i) \quad V(1000;3)=1000(1+0.03)^3=1092.73$$

$$ii) \quad V(1000;7/12)=1000(1+0.03)^{7/12}=1017.39$$

Na boku

"Nasi kupcy i najwięksi producenci ostro narzekają na wpływ wysokich zarobków na wzrost cen swoich produktów, który obniża sprzedaż zarówno krajową jako zagraniczną.

Nie mówią nic o negatywnych skutkach wysokich zysków.

Milczą się wobec szkodliwych efektów swoich dochodów.

Narzekają tylko o zyskach innych osób".

1.3 Aspekty Praktyczne - Kapitalizacja

Wzory podane powyżej zakładają że nałożono oprocentowanie w czasie ciągłym, czyli t może przyjąć dowolną (nieujemną) wartość.

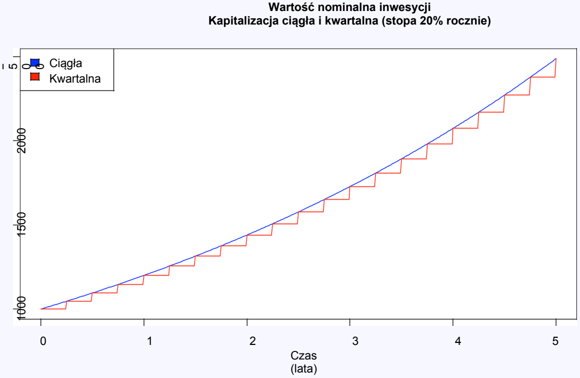
W praktyce, nominalna wartość inwestycji jest kapitalizowana pod koniec danego okresu, np. oprocentowanie jest nałożone codziennie lub co kwartał.

W tym przypadku, wzory podane powyżej są właściwe tylko pod koniec danego okresu (czyli aby zastosować wzory te, musimy wyznaczyć czas ostatniej kapitalizacji **w latach**).

Obliczamy odsetki w oparciu o stopę roczną.

Zakładamy że rok składa się z 12 miesięcy a miesiąc trwa 30 dni.

Efekt Kapitalizacji - Oprocentowanie Złożone



Przykład 1.3

a) Zakładamy że nałożono oprocentowanie proste o stopie rocznej 7,2%. Zainwestowano 200PLN. Wyznaczyć nominalną wartość tej inwestycji po 160 dniach, gdy inwestycja jest kapitalizowana

i) co miesiąc.
ii) co kwartał (1 kwartał to 3 miesiące).

b) Wyznaczyć odpowiednie wartości, gdy nałożono oprocentowanie złożone.

Przykład 1.3

Uwaga: Czas ostatniej kapitalizacji odpowiada liczbie skończonych okresów.

n.p. 160 dni to 5 miesięcy z haczykiem, czyli 5 skończonych miesięcy.

Więc gdy kapitalizacja zachodzi co miesiąc (kwartał), aby wyznaczyć wartość inwestycji, liczba okresów jest zawsze zaokrąglona w dół do całkowitej liczby miesięcy (kwartałów).

160 dni jest mniej niż 2 kwartały (6 miesiące = 180 dni). Więc jest tylko jeden skończony kwartał.

Zawsze liczymy czas w latach, więc w pierwszym przypadku czas ostatniej kapitalizacji wynosi $5/12$, w drugim przypadku $1/4$.

Przykład 1.3

Oprocentowanie proste: $V = x(1 + Rt)$.

a) i) 160 dni to 5 pełnych miesięcy (+10dni). Więc, $t = 5/12$ (czas w latach)

$$V = 200\left(1 + \frac{5 \times 0.072}{12}\right) = 206$$

ii) 160 dni to 1 pełny kwartał. Więc, $t = 1/4$.

$$V = 200\left(1 + \frac{0.072}{4}\right) = 203.60$$

Przykład 1.3

Oprocentowanie złożone: $V = x(1+R)^t$.

b) i) 160 dni to 5 pełnych miesięcy (+10dni). Więc, $t = 5/12$

$$V = 200(1+0.072)^{5/12} = 205.88$$

ii) 160 dni to 1 pełny kwartał. Więc, $t = 1/4$.

$$V = 200(1+0.072)^{1/4} = 203.51$$

Czas potrzebny aby wartość inwestycji osiągnęła określoną kwotę

Teraz rozważamy czas potrzebny żeby wartość inwestycji osiągnęła określoną kwotę k (zakładamy że kapitalizacja jest ciągła).

Przy oprocentowaniu prostym, musimy rozwiązać równanie liniowe $x(1 + Rt) = k$ aby wyznaczyć t.

Przy oprocentowaniu złożonym, musimy rozwiązać równanie

$$x(1 + R)^t = k \Rightarrow (1 + R)^t = \frac{k}{x}.$$

Aby to rozwiązać, bierzemy logarytmy po obu stronach.

Czas potrzebny aby wartość inwestycji osiągnęła określoną kwotę

Gdy kapitalizacja nie zachodzi w sposób ciągły, wartość inwestycji osiąga odpowiednią wartość dopiero pod koniec odpowiedniego okresu.

Najpierw, wyznaczamy odpowiedni czas przy kapitalizacji ciągłej.

Potem należy zaokrąglić liczbę okresów do góry.

Przykład 1.4

Wyznaczyć czas podwojenia gdy zastosowano oprocentowanie złożone o stopie 6% rocznie a inwestycja jest kapitalizowana

a) w sposób ciągły
b) co kwartał,
c) miesięcznie.

Przykład 1.4

a) Kapitalizacja ciągła.
Trzeba wyznaczyć czas t taki że $2x = x(1 + 0,06)^t$.

$$\begin{aligned} 2 &= 1,06^t \\ \log 2 &= \log(1,06^t) \\ \log 2 &= t \log 1,06 \\ t &= \frac{\log 2}{\log 1,06} = 11,8957 \text{ (lata)} \end{aligned}$$

Przykład 1.4

b) Kapitalizacja miesięczna. Wyznaczamy liczbę miesięcy odpowiadających części niecałkowitej (po przecinku) i zaokrąglić do góry (skoro wartość nominalna inwestycji w czasie $t = 11.8957$ będzie mniejsza niż $2x$)

0,8957 lat $= 0,8957 \times 12$ miesięcy $\approx 10,75$ miesięcy.

Więc, trzeba 11 lat i 11 miesięcy.

Przykład 1.4

c) Kapitalizacja kwartalna. Zaokrąglamy do pełnej liczby kwartałów.

Skoro część niecałkowita jest większa niż 3/4 roku, zaokrąglamy do pełnej liczby lat.

Więc trzeba 12 lat.

1.4 Stopa zwrotu z środków trwałych

Zakładamy że przychód roczny z kapitału trwałego (np. z wynajęcia mieszkania) o aktualnej wartości x wynosi I.

Wtedy roczna stopa zwrotu, R, wynosi

$$R = \frac{I}{x}$$

Pomnożąc przez 100, otrzymujemy stopę zwrotu w skali procentowej.

Stopa zwrotu z środków trwałych

Na przykład, gdy wartość mieszkania wynosi 400 000zł oraz miesięczny przychód z wynajmu wynosi 1 500zł, wtedy roczna stopa zwrotu wynosi

$$R = \frac{1500 \times 12}{400000} = 0,045.$$

Więc, procentowa stopa zwrotu wynosi 4,5% rocznie.

Uwaga: Używam tej samej notacji dla stopy procentowej oraz stopy zwrotu, bo obie miary są miarami stopy zwrotu z pewnej inwestycji.