Koszty poniesione przez firmę zwykle są podzielone na dwie kategorie.

1. Koszty stałe - są niezależne od poziomu produkcji, np. stałe koszty energetyczne i ogrzewania, koszty wynajmu.
2. Koszty zmienne - zależą od poziomu produkcji, np. koszty surowców, pensje pracowników oraz koszty energii wykorzystanej przy produkcji.

Koszty stałe i zmienne

Należy zauważyć że niektóre koszty są do pewnego stopnia "stałe", skoro zatrudnienie lub zwolnienie pracowników wymaga czasu.

Z drugiej strony, koszty nadgodzin są dosyć elastyczne.

Ogólnie, można zmienić koszty stałe w ciągu kilku miesięcy (lub lat), koszty zmienne można zmienić w krótszym czasie (do kilku miesięcy).

Koszty Całkowite

Niech q_s będzie podażą pewnego towaru (gdy mamy do czynienia tylko z podażą a nie z popytem, opuszczamy indeks).

Koszty całkowite poniesione przez firmę wynosi $c_T(q)$, gdzie

$$c_T(q) = c_F + c_V(q).$$

Tutaj, c_F oznacza koszty stałe (nie zależą od q), a $c_V(q)$ oznacza koszty zmienne (jest to funkcja poziomu produkcji).

Koszty średnie oraz krańcowe

Średni koszt na jednostkę produkcji, $c_A(q)$, wyraża się wzorem

$$c_A(q) = \frac{c_T(q)}{q} = \frac{c_F + c_V(q)}{q}.$$

Koszty krańcowe (marginalne) $c_M(q)$ opisują koszt produkowania "ostatniej jednostki towaru". Jeżeli poziom produkcji przyjmuje tylko wartości całkowite, wtedy

$$c_M(q) = c_T(q) - c_T(q-1) = c_V(q) - c_V(q-1).$$

Jeżeli poziom produkcji (podaż) jest zmienną ciągłą, wtedy

$$c_M(q) = c_T'(q) = c_V'(q).$$

Założenia dotyczące funkcji kosztów

W tym rozdziale, zakładamy że poziom produkcji jest zmienną ciągłą.

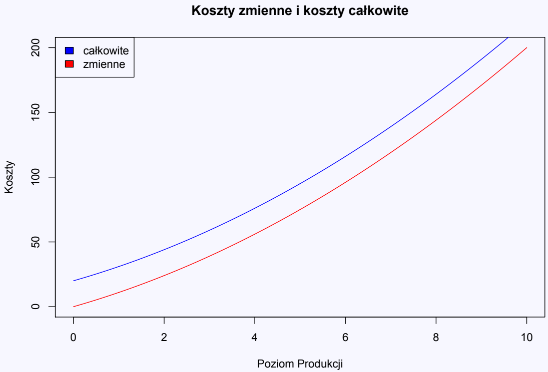
Zakładamy że $c_V'(q) = c_M(q) > 0$, czyli koszty rosną względem poziomu produkcji.

Równoważnie, koszty krańcowe są dodatnie.

Po drugie, dla wystarczająco dużych q, $c_V''(q) = c_M'(q) > 0$.

Drugie założenie zakłada że, ewentualnie, koszt produkowania "ostatniej jednostki" jest rosnący (czyli koszty krańcowe są ewentualnie rosnące).

Koszty zmienne i całkowite - Wykres



Ogólna postać funkcji średnich kosztów oraz kosztów krańcowych

Przy tych założeniach, zwykle średnie koszty najpierw szybko maleją a potem rosną powoli.

Średnie koszty osiągają swoje minimum w punkcie gdzie koszty średnie są równe kosztom krańcowym.

Przy niższych poziomach produkcji, koszty krańcowe są mniejsze niż koszty średnie.

Przy wyższych poziomach produkcji, koszty krańcowe są większe niż koszty krańcowe.

Założenia dotyczące funkcji kosztów

Drugie założenie nie jest tak intuicyjne jak pierwsze. Często bywa że dla małych firm koszty krańcowe są malejące skoro przy ekspansji firma może zatrudnić specjalistów i korzystać z bardziej wydajnej technologii.

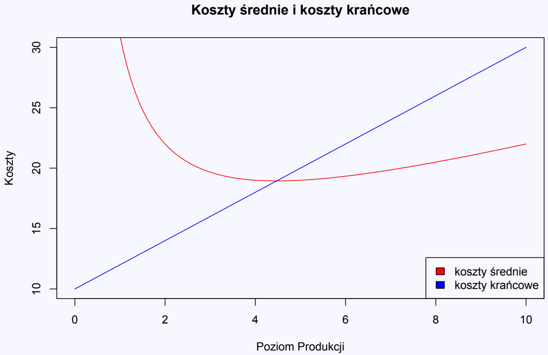
Ale fakt że ewentualnie koszty krańcowe są rosnące wynikają z następujących argumentów:

Firma zwykle zatrudnia najlepszych kandydatów na danym stanowisku (lub np. rolnik używa najlepszej ziemi).

Więc gdy rozmiar firmy rośnie, wydajność pracowników (lub ziemi) ewentualnie maleje.

Skoro pracownicy na danym stanowisku dostają taką samą pensję, ewentualnie koszty krańcowe zaczynają rosnąć.

Koszty średnie i krańcowe - Wykres



Przykład 6.1

Koszty całkowite firmy wyrażają się wzorem $c_T(q) = 100 + 5q + q^2$. Wyznaczyć

1. Funkcję średnich kosztów.
2. Funkcję kosztów krańcowych.
3. Minimalne średnie koszty oraz odpowiadający im poziom produkcji.

Przykład 6.1

1. Koszty średnie

$$c_A(q) = \frac{c_T(q)}{q} = \frac{100 + 5q + q^2}{q} = \frac{100}{q} + 5 + q.$$

2. Koszty krańcowe

$$c_M(q) = \frac{dc_T}{dq} = 5 + 2q.$$

Przykład 6.1

Metoda 1: Przy minimalnych kosztach średnich, koszty krańcowe są równe średnim kosztom. Poziom produkcji q spełnia

$$c_A(q) = c_M(q) \Rightarrow \frac{100}{q} + 5 + q = 5 + 2q$$

$$\frac{100}{q} = q$$

$$q^2 = 100 \Rightarrow q = 10$$

Minimalne koszty średnie są

$$c_A(10) = \frac{100}{10} + 5 + 10 = 25.$$

Przykład 6.1

Metoda 2: Możemy bezpośrednio zminimalizować średnie koszty za pomocą różniczkowania.

$$\frac{dc_A}{dq} = \frac{-100}{q^2} + 1.$$

Mamy punkt ekstremalny gdy $\frac{dc_A}{dq} = 0$. Wynika z tego, że

$$1 = \frac{100}{q^2} \Rightarrow q = 10.$$

Potem, minimalne koszty średnie można wyznaczyć tak jak na poprzednim slajdzie.

Pole pod wykresem funkcji kosztów krańcowych

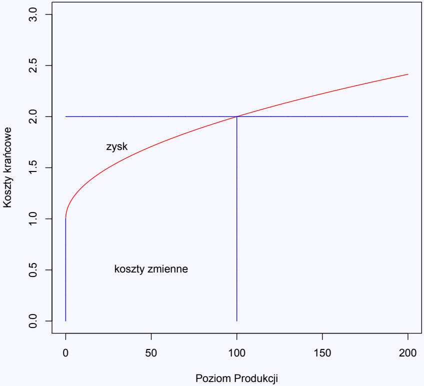
Pole pod wykresem funkcji kosztów krańcowych między 0 a q_0 wyraża się

$$\int_0^{q_0} c_M(q)dq = \int_0^{q_0} c_V'(q)dq.$$

Skoro całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania, wynika z tego że pole to jest równe kosztom zmiennym przy poziomie produkcji q_0.

Oczywiście gdy cena wynosi p i firma sprzedaje q_0 jednostek, przychód wynosi pq_0 (zob. wykres na następującym slajdzie).

Pole pod wykresem funkcji kosztów krańcowych



Uwaga: Zysk nie uwzględnia kosztów stałych, czyli jest zysk "brutto".

6.2 Krzywa podaży - w rynku doskonale konkurencyjnym

W tym podrozdziale, zakładamy że rynek cechuje się konkurencją doskonałą (czyli firma nie ma wpływu na cenę) oraz koszty krańcowe są rosnące.

Można też wyznaczyć krzywą podaży w przypadku gdy funkcja kosztów krańcowych posiada dokładnie jedno ekstremum (minimum). Ale tutaj nie rozważamy tego przypadku.

Na krótszą metę, firma tylko produkuje gdy przychód pokrywa wszystkie koszty zmienne.

Na dalszą metę, firma tylko produkuje gdy osiąga zyski (czyli przychód pokrywa koszty całkowite).

Uwaga: Na danym rynku podaż całkowita jest sumą funkcji podaży poszczególnych firm.

Wyznaczenie krzywej podaży

Skoro (z punktu widzenia firmy) cena jest ustalona, gdy koszty krańcowe są mniejsze niż cena, wtedy opłaca się produkować więcej.

Podobnie, gdy koszty krańcowe są większe niż cena, wtedy opłaca się produkować mniej.

Więc przy optymalnym poziomie produkcji, cena równa się kosztom krańcowym, czyli mamy $p = c_M(q)$. Więc $q = c_M^{-1}(p)$.

Wyznaczenie krzywej podaży

Z założenia minimalne koszty krańcowe zachodzą gdy $q = 0$. Niech $p_0 = c_M(0)$. Przy tej lub niższej cenie, firma nic nie produkuje, czyli $q_s(p) = 0$, $p \leqslant p_0$.

Dla $p > p_0$, przy poziomie produkcji q, gdzie $p = c_M(q)$, koszty zmienne są mniejsze niż przychód (zob. wykres powyżej).

Wynika z tego że krzywa podaży wyraża się funkcją $q_s(p) = c_M^{-1}(p)$, $p \geqslant p_0$, czyli należy wyznaczyć funkcję odwrotną do krzywej kosztów krańcowych.

Przykład 6.2

Koszty całkowite pewnej firmy działającej w rynku doskonale konkurencyjnym wynoszą $c_T(q) = 100 + 5q + q^2$.

Wyznaczyć krzywą podaży dla tej firmy.

Przykład 6.2

Mamy

$$c_M(q) = 5 + 2q.$$

Przy konkurencji doskonałej $c_M(q) = p$

$$5 + 2q = p \Rightarrow 2q = p - 5 \Rightarrow q = (p - 5)/2.$$

Zachodzi to, o ile $q \geqslant 0$, czyli $p \geqslant 5$.

Gdy $p < 5$, firma nic nie produkuje.

6.3 Cena rynkowa przy konkurencji doskonałej

Zakładamy że krzywe popytu i podaży na danym rynku wyrażają się funkcjami $q_d = d(p)$ i $q_s = s(p)$, odpowiednio.

Przy konkurencji doskonałej, punkt przycięcia tych dwóch krzywych (gdzie podaż równa się poptyowi) wyznacza równowagę rynkową.

Należy zanotować że też można określić krzywe popytu i podaży jako funkcje poziomu produkcji, czyli $p_d = d^{-1}(q)$ and $p_s = s^{-1}(q)$.

Przykład 6.3

Zakładamy że popyt oraz podaż na danym rynku doskonale konkurencyjnym wyrażają się

$$q_d = 400 - 4p$$
$$q_s = 6p - 100$$

Wyznaczyć cenę i popyt w równowadze.

Przykład 6.3

Przy równowadze $q_d = q_s = q$. Więc,

$$\begin{aligned} 400 - 4p &= 6p - 100 \\ 500 &= 10p \Rightarrow p = 50. \end{aligned}$$

Więc popyt w równowadze: $q = q_d = 400 - 4p = 200$.

Lub równoważnie: $q = q_s = 6p - 100 = 200$.

Zakładamy że celem firmy prywatnej, która jest monopolem lub działa w warunkach konkurencji monopolistycznej (czyli ma wpływ na cenę), jest maksymalizacja zysków.

W dodatku, zakładamy że na krótszą metę popyt na pewien towar nie zależy od ceny towarów produkowanych przez inne firmy (np. monopol lub skrajne przypadki konkurencji monopolistycznej) oraz system jest w równowadze, czyli popyt równa się podaży, $q_d = q_s = q$ (firma zna postać krzywej popytu).

Cele firm publicznych są zwykle bardziej złożone i mogą wziąć pod uwagę np.: przychód, zysk, zatrudnienie, nadwyżkę konsumenta.

Optymalizacja poziomu produkcji monopolu

Przy cenie p, przychód firmy, $R(p)$, jest iloczynem ceny i popytu, czyli $R(p) = pd(p)$.

Odwracając funkcję popytu, możemy też wyznaczyć przychód jako funkcję popytu q, czyli $R(q) = qd^{-1}(q)$.

Optymalizacja poziomu produkcji monopolu

Odejmując całkowite koszty produkcji od przychodu, otrzymujemy zysk, Z.

Skoro koszty produkcji są wyrażone jako funkcja poziomu produkcji q, zwykle wyznaczamy zysk jako funkcję tej zmiennej, czyli

$$Z(q) = qd^{-1}(q) - c_T(q).$$

Funkcje te maksymalizujemy za pomocą różniczkowania.

Optymalizacja poziomu produkcji monopolu

Należy zauważyć że przy cenie, która maksymalizuje przychód, elastyczność popytu wynosi -1.

Natomiast, gdy konkurencja jest niedoskonała (lub nie istnieje), cena maksymalizująca zyski jest różna od kosztów krańcowych.

Przykład 6.4

Popyt na pewien towar wyraża się funkcją $q = d(p) = 400 - 4p$ dla $p \leqslant 100$.

Pzy założeniu że koszty produkcji są $c_T(q) = 100 + 5q + q^2$ (zob. przykład 6.1).

i) Wyznaczyć poziom produkcji oraz cenę, które maksymalizują przychód. Wyznaczyć maksymalny przychód.

ii) Wyznaczyć poziom produkcji oraz cenę, które maksymalizują zysk. Wyznaczyć maksymalny zysk.

Przykład 6.4

i) Metoda 1: Bezpośrednio maksymalizujemy funkcję przychodu $R(p) = pd(p)$.

$$R(p) = p(400 - p) = 400p - 4p^2.$$

Różniczkując

$$R'(p) = 400 - 8p.$$

Jest to maksymalizowane gdy $R'(p) = 0$, czyli $p = 50$.

Przykład 6.4

Gdy $p = 50$, popyt wynosi $d(p) = 400 - 4 \times 50 = 200$.

Przychód wynosi

$$R(p) = pd(p) = 50 \times 200 = 10000.$$

Przykład 6.4

Metoda 2: Przy maksymalnym przychodzie, elastyczność popytu wynosi -1.

$$\epsilon_p = \frac{pd'(p)}{d(p)},$$

gdzie $d(p) = 400 - 4p$, $d'(p) = -4$.

Otrzymujemy

$$\frac{-4p}{400 - 4p} = -1$$
$$-4p = 4p - 400 \Rightarrow 400 = 8p \Rightarrow p = 50$$

Popyt i przychód możemy wyznaczyć tak jak na poprzednim slajdzie.

Przykład 6.4

ii) Maksymalizujemy zysk jako funkcję popytu, q.

Więc piszemy cenę p jako funkcję popytu, q.

$$q = 400 - 4p \Rightarrow 4p = 400 - q \Rightarrow p = 100 - q/4.$$

Przykład 6.4

Zysk jest równy różnicy między przychodem a kosztami produkcji, czyli

$$Z(q) = pq - c_t(q) = q(100 - q/4) - 100 - 5q - q^2.$$
$$= 95q - 100 - \frac{5q^2}{4}.$$

Różniczkując

$$Z'(q) = 95 - \frac{5q}{2}$$

Funkcja zysku jest zmaksymalizowana gdy $Z'(q) = 0$, czyli

$$\frac{5q}{2} = 95 \Rightarrow q = 38.$$

Przykład 6.4

Maksymalny zysk wynosi $Z(38)$, gdzie

$$Z(38) = 95 \times 38 - 100 - \frac{5 \times 38^2}{4} = 1705.$$

Cena wynosi

$$p = 100 - q/4 = 90,50.$$