3.1 Analiza zysków i strat

Zakładamy że firma decyduje czy ma wdrożyć nowy produkt (wykonać projekt).

Firma musi rozważyć czy przyszłe zyski (dyskontowane w czasie) z tego projektu są większe niż koszty poniesione teraz.

Analiza zysków i strat

Zakładamy że firma może podjąć maksymalnie jeden z k projektów.

Można to modelować jako wybór jednej z $k+1$ opcji, $0, 1, \ldots, k$ gdzie:

1. Opcja 0: nie wykonać żadnych z projektów.
2. Opcja i: wykonać projekt i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Należy powiedzieć że czasami firma może wykonać więcej niż jeden projekt z tej listy, ale nie rozważamy takiej możliwości.

Analiza zysków i strat

Zakładamy że opcja 0 nie jest związana z żadnymi kosztami ani stratami.

Natomiast, w rzeczywistości opcja ta może być związana z pewnymi kosztami (np. niewykorzystanego potencjału pracowników).

Według metody analizy zysków i strat, firma powinna wybrać opcję, która daje największą sumę dyskontowanych zysków (gdzie straty są zinterpretowane jako zyski ujemne): o ile ta suma jest dodatnia.

Przykład 3.1

Zakładamy że firma może podjąć jeden z dwóch projektów: A lub B.

Koszty inwestycji (podniesione teraz) a oczekiwane zyski w przyszłości podano poniżej:

Projekt	Inwestycja	Zysk za rok	Zysk za dwa lata	Zysk za trzy lata
A	1000	200	600	400
B	2000	300	1500	700

Zakładamy że dyskonto roczne wynosi 0,9. Czy firma powinna podjąć projekt A, projekt B, lub żaden z tych projektów?

Przykład 3.1

V_i - wartość aktualna projektu i.

$$\begin{aligned} V_A =& 200 \times 0.9 + 600 \times 0.9^2 + 400 \times 0.9^3 - 1000 \\ =& -42.40 \\ V_B =& 300 \times 0.9 + 1500 \times 0.9^2 + 700 \times 0.9^3 - 2000 \\ =& -4.7 \end{aligned}$$

Skoro obie wartości są ujmne, nie wykonamy żadnego projektu.

3.2 Wycena obligacji kuponowych

Obligacja rządowa gwarantuje pewną kwotę nominalną (lub kwoty nominalne) w określonym czasie (w określonych czasach).

Wypłaty te przychodzą regularnie (co roku lub co pół roku) a przy terminie obligacji zwykle zachodzi większa wypłata.

Cena sprawiedliwa takiej obligacji równa się sumie wypłat dyskontowanych.

Dyskonto roczne jest oparte na wartości inwestycyjnej, czyli dyskonto wynosi $\frac{1}{1+R}$, gdzie $100R\%$ jest stopa procentowa na inwestycji bez ryzyka.

Wycena obligacji zerokuponowych

Obligacja zerokuponowa daje tylko jedną wypłatę, przy terminie.

Ceną sprawiedliwą takiej obligacji jest wartość aktualna wypłaty przy terminie gdy dyskonto jest oparte na stopie procentowej.

Należy zauważyć że cena sprawiedliwa jest wartość pieniędzy, które należy zainwestować teraz żeby wartość nominalna tej inwestycji przy terminie obligacji była równa wypłacie obiecanej przez obligację (przy założeniu że stopa procentowa nie zmienia się).

Czyli osobie jest wszystko jedno czy kupuje obligację czy inwestuje.

Przykład 3.2

Zakładamy że stopa procentowa jest 3% rocznie i nie zmieni się.

Obligacja zerokuponowa gwarantuje wypłacić kwotę \$1000 za 5 lat.

Jaka jest cena sprawiedliwa takiej obligacji?

Przykład 3.2

Cena sprawiedliwa równa się wartości aktualnej według siły inwestycyjnej.

Dyskonto wynosi

$$\alpha = \frac{1}{1+R} = \frac{1}{1,03}$$

Wartość aktualna równa się

$$V = 1000\alpha^5 = \frac{1000}{1,03^5} = 862,61.$$

Przykład 3.3

Obligacja kuponowa gwarantuje wypłacić kwotę \$200 co roku przez 9 lat (pierwsza wypłata zajdzie za rok), a przy terminie za 10 lat wypłaci \$1000.

Zakładamy że stopa procentowa jest 5% rocznie i nie zmieni się.

Jaka jest cena sprawiedliwa tej obligacji?

Przykład 3.3

Cena sprawiedliwa równa się sumie wartości aktualnych według siły inwestycyjnej.

$$\alpha = \frac{1}{1+R} = \frac{1}{1,05}$$

$$V = 200\alpha + 200\alpha^2 + \ldots + 200\alpha^9 + 1000\alpha^{10}.$$

Wyłączając ostatni wyraz, otrzymujemy sumę geometryczną z 9 elementami, gdzie pierwszy wyraz równa się 200α, a iloraz wynosi α. Więc

Przykład 3.3

$$
\begin{aligned}
V = & \frac{200\alpha(1-\alpha^9)}{1-\alpha} + 1000\alpha^{10} \\
= & 1421,56 + 613,91 = 2035,47
\end{aligned}
$$

Wartość aktualna obligacji, którą można odsprzedać

Z upływem czasu, wartość aktualna takiej obligacji się zmienia w zależności od wartości aktualnej przyszłych wypłat.

Sprawiedliwa cena obligacji w danej chwili równa się wartości aktualnej przyszłych wypłat, które **jeszcze mają zajść**.

Na przykład, bezpośrednio po pierwszej wypłacie (czyli po roku), jeszcze będzie 8 rocznych wypłat kwoty \$200 (na pierwszą trzeba czekać rok), a wypłata przy terminie (\$1000) zachodzi za 9 lat.

Wartość aktualna obligacji, która można sprzedać

Czyli, bezpośrednio po pierwszej wypłacie (czyli po roku), cena sprawiedliwa obligacji kuponowej z przykładu 3.3 wynosi

$$V = 200(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \ldots + \frac{1}{1.05^8}) + \frac{1000}{1.05^9}$$

Im bliżej terminu, tym bliżej cena sprawiedliwa będzie do wypłaty końcowej (niezależnie od stopy procentowej).

Przykład 3.4

Obligacja odsprzedalna o terminie sześcioletnim obiecuje pięć rocznych wypłat o wartości nominalnej \$50 (pierwsza wypłata zajdzie za rok) oraz wypłatę o wartości nominalnej \$1000 przy terminie. Przy założeniu że stopa procentowa wynosi 5%,

i) wyznaczyć sprawiedliwą cenę tej obligacji.

ii) wyznaczyć sprawiedliwą cenę tej obligacji bezpośrednio po drugiej wypłacie (czyli po dwóch latach).

Przykład 3.4

Cena sprawiedliwa równa się sumie wartości aktualnych według siły inwestycyjnej.

$$\alpha = \frac{1}{1+R} = \frac{1}{1,05}.$$

Cena sprawiedliwa (obecnie)

$$V = 50\alpha + 50\alpha^2 + 50\alpha^3 + 50\alpha^4 + 50\alpha^5 + 1000\alpha^6.$$

Znowu wyłączając ostatni wyraz, otrzymujemy sumę geometryczną z 5 elementami, gdzie pierwszy wyraz równa się 50α, a iloraz wynosi α. Więc

Przykład 3.4

$$
\begin{aligned}
V = & \frac{50\alpha(1-\alpha^5)}{1-\alpha} + 1000\alpha^6 \\
= & 216,47 + 746,22 = 962,69
\end{aligned}
$$

Przykład 3.4

Patrząc w przyszłość od momentu odsprzedaży, będą jeszcze 3 wypłaty roczne (pierwsza po roku) o wartości 50 oraz wypłata końcowa (po 4 latach) o wartości 1000.

Sumując bezpośrednio

$$V = 50\alpha + 50\alpha^2 + 50\alpha^3 + 1000\alpha^4 = 958,86.$$

Zmiana stopy procentowej

Powyżej założyliśmy że stopa procentowa nie zmienia się w czasie.

Gdy stopa procentowa rośnie, dyskonto $\frac{1}{1+R}$ maleje.

Wynika z tego, że wartość aktualna ustalonego ciągu przyszłych wypłat maleje.

Więc gdy stopa procentowa rośnie, wartość obligacji kuponowej maleje.

Analogicznie, gdy stopa procentowa maleje, wartość obligacji kuponowej rośnie.

Zmiana stopy procentowej

Fakty te sugerują że kupno obligacji, która została wyceniona przy ustalonej stopie procentowej, jest zyskowne, gdy się oczekuje że stopy procentowe będą maleć.

Jest to intuicyjne, bowiem kupno obligacji można zinterpretować jako inwestycję przy ustalonej stopie procentowej.

Podobnie, gdy się oczekuje że stopy procentowe będą wzrastać, najlepiej zainwestować pieniądze w bank.

Można to zilustrować na przykładzie obligacji zerokuponowej, która gwarantuje wypłatę za dwa lata, gdy stopa procentowa może ulegać zmianie po roku.

Przykład 3.5

Rozważamy obligację zerokuponową, która gwarantuje wypłatę o wartości 1000zl za 2 lata. Zakładamy że obecna stopa procentowa wynosi 5%.

Wyznaczyć

i) cenę sprawiedliwą obligacji przy założeniu że stopa procentowa nie zmienia się.
ii) zysk nominalny (po 2 latach) gdy się inwestuje pieniądze na lokacie oraz stopa procentowa rośnie do 7% po roku (w porównania do wypłaty zagwarantowanej przez obligację).
iii) zysk nominalny (po 2 latach) gdy się kupuje obligację oraz stopa procentowa maleje do 4% po roku (w porównania do inwestycji bankowej).

Przykład 3.5

Cena sprawiedliwa równa się wartości aktualnej wypłaty według siły inwestycyjnej.

$$V_1 = 1000\alpha^2 = \frac{1000}{1,05^2} = 907,03$$

Przykład 3.5

Zakładamy że osoba wpłaca x na konto oszczędnościowe gdy stopa procentowa wynosi R_1.

Po czasie t_1 (w latach), wartość nominalna tej inwestycji wynosi V_1, gdzie

$$V_1 = x(1 + R_1)^{t_1}$$

Przykład 3.5

Zakładamy teraz ż stopa procentowa się zmienia na R_2 oraz pieniądze leżą na koncie jeszcze t_2 lat.

Traktując V_1 jako "wkład wstępny" w czasie t_1, nominalna wartość inwestycji w czasie $t_1 + t_2$ wynosi V_2, gdzie

$$V_2 = V_1(1 + R_2)^{t_2} = x(1 + R_1)^{t_1}(1 + R_2)^{t_2}$$

Uwaga: Można uogólnić wzór ten na większą liczbę okresów.

Przykład 3.5

ii) Gdyby cena obligacji (907,03) została wpłacona na konto, po 2 latach nominalna wartość takiej inwestycji by wynosiła

$$V_2 = 907,03 \times 1,05 \times 1,07 = 1019,05.$$

Gdyby pieniądze zostały wpłacone na konto, wysk nominalny wynosiłby 19,05. (klient dostaje 1019,05 po 2 latach zamiast 1000).

Przykład 3.5

iii) Gdyby cena obligacji (907,03) została wpłacona na konto, po 2 latach nominalna wartość takiej inwestycji by wynosiła

$$V_2 = 907,03 \times 1,05 \times 1,04 = 990,48.$$

Gdyby klient kupuje obligację, wysk nominalny wynosiłby 9,52. (klient dostaje 1000 po 2 latach zamiast 990,48).

Kupno obligacji jako ubezpieczenie przed ryzykiem zmiany stóp procentowych

Z analizy powyżej wynika że kupno obligacji jest sposobem na unikanie ryzyka zmiany stóp procentowych.

Skoro osoby zwykle mają awersję do ryzyka, w stabilnej gospodarce stopa procentowa używana aby wycenić obligację jest trochę mniejsza od obecnej oficjalnej stopy procentowej.

Czyli osoby płacą "dopłatę" aby unikać ryzyka.

Kupno obligacji jako ubezpieczenie przed ryzykiem zmiany stóp procentowych

Natomiast, gdy zamiast kupić obligację (co jest rodzaj pożyczki udzielonej rządowi), osoba pożyczy pieniądze od banku przy ustalonej stopie w stabilnej gospodarce, stopa procentowa nałożona na tej pożyczce będzie trochę większa niż obecna oficjalna stopa procentowa.

Skoro stopa jest ustalona, bank ponosi ryzyko zmiany, więc żąda wyższej stopy.

Niegwarantowane długi

Powyżej rozważyliśmy możliwość że stopa procentowa się zmienia.

Natomiast, założyliśmy że wypłaty są zagwarantowane przez rząd.

W praktyce, niektóre rodzaje pożyczek mogą być niegwarantowane.

Hypoteka jest zagwarantowana do pewnego stopnia ceną nieruchomości, chociaż cena domu może maleć

Niegwarantowane długi

Intuicyjnie, gdy istnieje ryzyko że dług nie zostanie spłacony, wtedy cena sprawiedliwa obligacji będzie niższa.

Aby brać to ryzyko pod uwagę, zwykle się stosuje większą stopę procentową w zależności od poziomu ryzyka, czyli

$$R_A = R + R^*,$$

gdzie R_A, jest nałożona stopa procentowa, R^* jest rodzajem "dopłaty" nałożonej w zależności od poziomu ryzyka niespłacenia długu.

Przykład 3.6

Zakładamy że stopa procentowa na lokacie bez ryzyka wynosi 5% oraz nałożono dodatkową 4% z powodu ryzyka.

Wyznaczyć cenę obligacji, która obiecuje 9 wypłat rocznych po \$200 oraz kwotę \$1000 przy terminie za 10 lat (zob. przykład 3.3).

Uwaga: Dopłatę tę można zinterpretować jako prawdopodobieństwo tego że w ciągu roku stan finansowy pożyczobiorcy się zmienia tak, że już nie może spłacić długu.

Przykład 3.6

Argumentując tak jak w Przykładzie 3.3, cena sprawiedliwa obligacji wynosi

$$\begin{aligned} V &= 200\alpha + 200\alpha^2 + \ldots + 200\alpha^9 + 1000\alpha^{10} \\ &= \frac{200\alpha(1-\alpha^9)}{1-\alpha} + 1000\alpha^{10} \end{aligned}$$

Przykład 3.6

Jedyna różnica jest to, że stosuje się stopę procentową 5%+4% . Więc,

$$\alpha = \frac{1}{1+R} = \frac{1}{1,09}$$

Zatem

$$\begin{aligned} V = & \frac{200\alpha(1-\alpha^9)}{1-\alpha} + 1000\alpha^{10} \\ = & 1199,05 + 422,41 = 1621,46 \end{aligned}$$